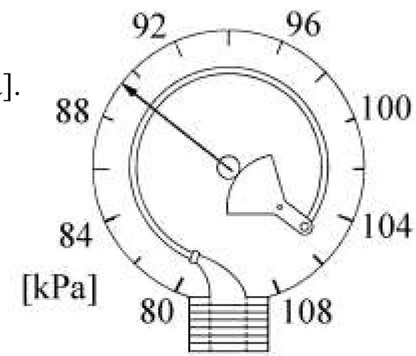
Cuaderno de ejercicios de fundamentos Física

Física e ingeniería

Ejercicios resueltos

1. Para caracterizar el manómetro de Bourdon que se muestra, se realizaron varias mediciones de presión de un gas variando su volumen; por otra parte se calcularon los valores correspondientes de acuerdo con una ecuación que se ajusta de manera exacta al comportamiento del gas para tener los valores de referencia (valores patrones). Parte de las mediciones se muestran en la tabla, determine:

a) La ecuación de la curva de calibración.
b) El porcentaje de precisión para el valor P_P = 86 000 [Pa].
c) El porcentaje de exactitud para el valor patrón anterior.
d) La incertidumbre asociada al conjunto de mediciones correspondiente al valor patrón P_P = 88 000 [Pa].
e) Las características estáticas del instrumento y la lectura que indica.



P_P [Pa]	$\overline{P_L}$ [kPa]	P_{L1} [kPa]	P_{L2} [kPa]	P_{L3} [kPa]	P_{L4} [kPa]	P_{L5} [kPa]
84 000	84.4	84	84	86	84	84
86 000	87.2	86	86	88	88	88
88 000	89.2	88	90	88	90	90
90 000	91.2	90	92	90	92	92

Resolución:

a) La ecuación de la curva de calibración tendrá la forma $P_L = m\, P_p + b$,

cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta P_L}{\Delta P_p}$; calculando el valor de la pendiente con el método de la suma de los cuadrados mínimos tenemos $m = 1.12 \left[\dfrac{\text{kPa}}{\text{kPa}}\right]$; y la ordenada al origen es $b = -9.44$ [kPa], de esta manera el modelo matemático solicitado es:

$$P_L\,[\text{kPa}] = 1.12 \left[\frac{\text{kPa}}{\text{kPa}}\right] P_p\,[\text{kPa}] - 9.44\,[\text{kPa}].$$

b) El porcentaje de precisión se calcula como % P = 100 − % EP , por lo tanto es necesario calcular primero el porcentaje de error de precisión, el cual se puede calcular con la expresión:

$$\% \, EP = \left| \frac{\overline{P} - P_{+a}}{\overline{P}} \right| \times 100 \, \% \text{ ; entonces } \%EP = \left| \frac{(87.2 - 86)}{87.2} \right| \times 100 \, \% = 1.3761 \, \% \text{ ; con}$$

este error, podemos calcular el porcentaje de precisión solicitado: % P = 100 % – 1.3761 % = 98.6239 %.

c) Para calcular el porcentaje de exactitud, tenemos que %E = 100–%EE ;

en donde el error de exactitud está dado por $\%EE = \left| \frac{P_p - \overline{P}}{P_p} \right| \times 100\%$

por lo tanto $\%EE = \left| \frac{86 - 87.2}{86} \right| \times 100 \, \% = 1.3953\%$.

Así, el porcentaje de exactitud es: %E = 98.6047 %.

d) El número de lecturas que corresponden al valor patrón referido es n = 5, la incertidumbre asociada se puede calcular como $\Delta P = \pm \frac{S_P}{\sqrt{n}}$; donde la desviación estándar de la variable P, está dada por:

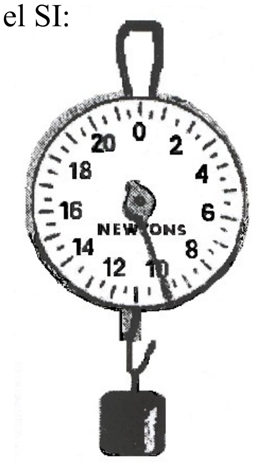
$$S_P = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\overline{P_L} - P_i)^2} = \pm \left\{ \frac{1}{5-1} \left[(89.2 - 88)^2 (2) + (89.2 - 90)^2 (3) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ [kPa]},$$

entonces $S_P = \pm \, 1.0954$ [kPa] ; por lo tanto la incertidumbre es $\Delta P = \pm \frac{1.0954 \text{ kPa}}{\sqrt{5}}$,

$\Delta P = \pm \, 0.4899$ [kPa].

e) De acuerdo con la figura, el rango del instrumento es de 80 a 108 [kPa], su resolución es 2 [kPa], su legibilidad puede considerarse como buena y la lectura mostrada es 90 [kPa].

2. Para caracterizar el dinamómetro que se muestra en la figura se emplearon varias masas patrón y se midieron sus pesos, según se muestra en la tabla. Sabiendo que el experimento se hizo en la Cd. de México, g = 9.78 [m/s^2], determine en el SI:



a) La sensibilidad del instrumento de medición.
b) El porcentaje de exactitud para el valor patrón m_P = 200 [g].
c) El rango, la resolución y la legibilidad del dinamómetro. Escriba también el valor de la lectura y la expresión dimensional de la misma.

m_P [g]	0	140	200	350
W_L [N]	0.5	1.5	2	3.5

Resolución:

a) Como se trata de un dinamómetro, primero se calcularán los pesos patrones, con base en los valores de las masas patrones.
Dado que $W_p = m_P \cdot g$, entonces

W_P [N]	0	1.3692	1.956	3.423
W_L [N]	0.5	1.5	2	3.5

Para calcular la sensibilidad del instrumento se calcula la pendiente de la curva de calibración

$m = S = \dfrac{\Delta W_L}{\Delta W_P}$, entonces, con el método de la suma de los cuadrados mínimos:

S = 0.8774 [N/N].

b) Para calcular el porcentaje de exactitud, es necesario calcular primero el porcentaje de error de exactitud, entonces

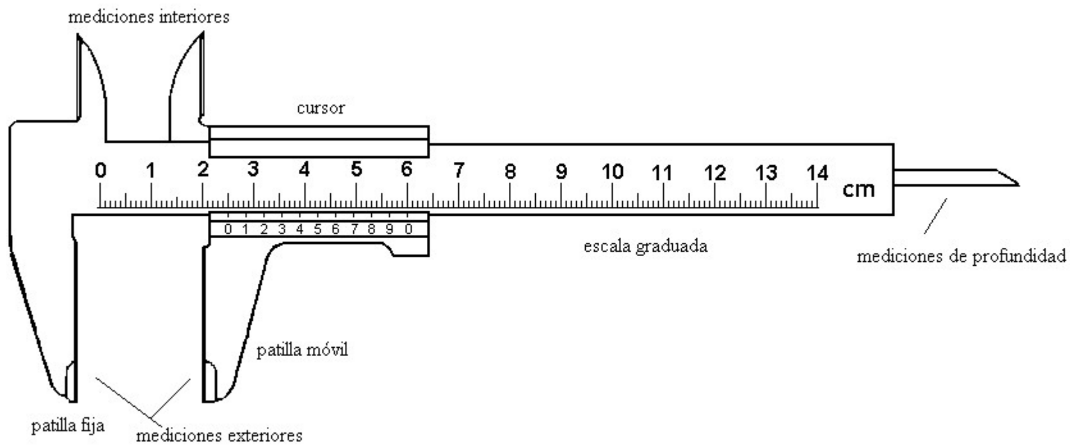
$$\%E = 100 - \%EE\ ,\ \%EE = \left|\frac{W_p - W_L}{W_p}\right| \times 100\% = \left|\frac{(1.956 - 2)\text{N}}{1.956\ \text{N}}\right| \times 100\% = 2.2495\%,$$

así, el porcentaje de exactitud será: %E = 97.75056 %.

c) De acuerdo con la figura, el rango es de 0 a 22 [N], la resolución es 0.5 [N], su legibilidad es buena y la lectura que indica es 10 [N]. La expresión dimensional, en el SI, de la lectura es la que corresponde a la cantidad física llamada fuerza, por lo tanto:

dim(lectura) = dim(fuerza) = $L\ M\ T^{-2}$.

3. Con el vernier que se muestra en la figura, se tomaron mediciones para su caracterización. En la tabla se muestran parte de los datos obtenidos. Basándose en la figura y en la información, determine:



L_P [mm]	$\overline{L}_L$ [mm]	L_{L1} [mm]	L_{L2} [mm]	L_{L3} [mm]	L_{L4} [mm]	L_{L5} [mm]
10	10.30	10.5	10.2	10.3	10.4	10.1
20	20.22	20.3	20.2	20.0	20.4	20.2
30	30.30	30.4	30.4	30.2	30.2	30.3
40	40.36	40.5	40.4	40.3	40.3	40.3

a) El modelo matemático de la curva de calibración.

b) El porcentaje de error de exactitud y el de exactitud para las mediciones del valor patrón de 40 [mm].

c) El porcentaje de error de precisión y el de precisión para las mediciones del valor patrón de 20 [mm].

d) Las características estáticas del instrumento así como su sensibilidad en el rango de mediciones presentado en la tabla.

Resolución:

a) El modelo matemático de la curva de calibración tendrá la forma: $L_L = m\, L_P + b$,

donde la pendiente es $m = \dfrac{\Delta L_L}{\Delta L_P}$; por lo tanto $m = 1.0026$ [mm/mm] y la ordenada al origen es:

b = 0.23 [mm]; por lo tanto el modelo matemático es:

L_L[mm] = 1.0026 [mm/mm] L_P[mm] + 0.23 [mm].

b) Para calcular el porcentaje de error de exactitud tenemos que $\%EE = \left|\dfrac{L_p - \overline{L}_L}{L_p}\right| \times 100$, entonces $\%EE = \left|\frac{40-40.36}{40}\right| \times 100 = 0.9\%$;

para el porcentaje de exactitud, sabemos que $\%E = 100 - \%EE$ = (100 − 0.9)%,

entonces $\%E = 99.1\%$.

c) Para el cálculo del porcentaje de error de precisión sabemos que

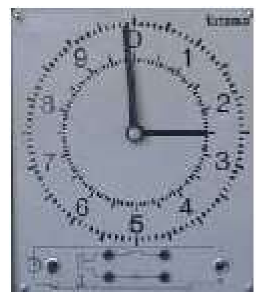
$\%EP = \left|\frac{\overline{L}_L - L_{ma}}{\overline{L}_L}\right| \times 100$, es decir $\%EP = \left|\frac{20.22-20}{22.22}\right| \times 100 = 1.088\%$, por lo tanto

para el porcentaje de precisión se tiene:

$\%P = 100 - \%EP$ = (100 − 1.088)% = 98.912%.

d) El rango es de 0 a 14 [cm], su resolución 0.1 [mm], legibilidad: buena, como S = *m*, entonces la sensibilidad es: 1.0026 [mm/mm].

4. Con el cronómetro que se muestra en la figura, se tomaron las mediciones que se muestran en las tablas para determinar sus características dinámicas y su curva de calibración. En diez segundos la aguja pequeña gira diez vueltas completas y la aguja grande se mueve hasta la posición "1". Con base en la información proporcionada, determine:



a) El porcentaje de exactitud del cronómetro para el valor patrón de 15 [s].
b) El porcentaje de precisión del instrumento para el valor patrón anterior.
c) La sensibilidad del cronómetro.

t_P [s]	t_{L1} [s]	t_{L2} [s]	t_{L3} [s]	t_{L4} [s]	t_{L5} [s]
15.00	15.05	15.05	15.04	15.03	15.04

t_P [s]	10.00	20.00	30.00	40.00
t_L[s]	10.98	20.56	30.55	40.79

Resolución:

a) Con base en la primera tabla, primero se calcula el valor más representativo del conjunto de mediciones, es decir el valor patrón $\overline{t}_L = 15.042[s]$, para calcular el porcentaje de exactitud es necesario calcular el error de exactitud, por lo tanto

$\%E = 100 - \%EE$, $\%EE = \left|\frac{t_p - \overline{t}_L}{t_p}\right| \times 100$, $\%EE = \left|\frac{15-15.042}{15}\right| \times 100$,

$\%EE = 0.28\%$; por lo tanto $\%E = 99.72\%$.

b) Para el cálculo del porcentaje de precisión obtenemos primero el error de precisión, es decir $\%P = 100 - \%EP$, $\%EP = \left| \dfrac{\bar{t}_L - t_{+a}}{\bar{t}_L} \right| \times 100$,

$$\%EP = \left| \frac{15.042 - 15.03}{15.042} \right| \times 100 = 0.0798\%$$, por lo tanto $\%P = 99.9202\%$.

c) La sensibilidad es la pendiente del modelo matemático de la curva de calibración, entonces

$S = m$; $m = \dfrac{\Delta t_L}{\Delta t_p}$; por lo tanto $m = 0.9942$ [s/s], entonces $S = 0.9942 \left[\dfrac{s}{s} \right]$.

5. Un alumno de Física Experimental caracterizó un óhmetro. Para ello, basándose en el código de colores que tienen los resistores, determinó los valores patrones de algunos arreglos con dichos elementos y midió con el instrumento bajo prueba la resistencia equivalente. Parte de las mediciones se muestran en la tabla, determine en el SI:

a) La sensibilidad del óhmetro.
b) El porcentaje de precisión para el valor patrón $R_P = 330$ [Ω].
c) La incertidumbre asociada al conjunto de mediciones del valor patrón del inciso anterior.

R_P [Ω]	$\bar{R}_L$ [Ω]	R_{L1} [Ω]	R_{L2} [Ω]	R_{L3} [Ω]	R_{L4} [Ω]
330	330.25	335	335	320	331
660	655.2				
990	995.75				
1320	1328.5				

Resolución:

a) El modelo matemático de la curva de calibración tiene la forma $R_L = m\, R_P + b$, donde la pendiente es la sensibilidad del instrumento, es decir $m = S$

$m = \dfrac{\Delta R_L}{\Delta R_P} =$, $m = 1.0107 \left[\dfrac{\Omega}{\Omega} \right]$ entonces $S = 1.0107 \left[\dfrac{\Omega}{\Omega} \right]$.

b) El porcentaje de precisión está dado por $\%P = 100 - \%EP$, por lo tanto el error de precisión se calcula como $\%EP = \left| \dfrac{\bar{R}_L - R_{ma}}{\bar{R}_L} \right| \times 100$,

$$\%EP = \left| \frac{330.25 - 320}{330.25} \right| \times 100 = 3.1037\%,$$

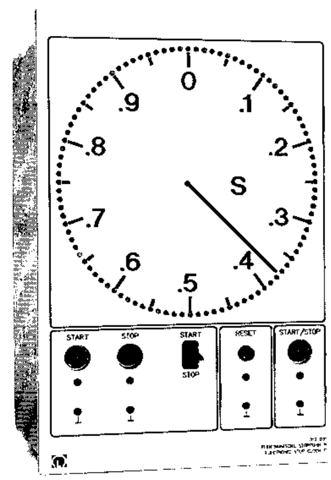
entonces el porcentaje de precisión solicitado es $\%P = 96.8963\%$.

c) La incertidumbre solicitada se calcula como $\Delta R = \pm\dfrac{S_R}{\sqrt{n}}$, en donde la desviación estándar de la variable física es $S_R = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\left(\overline{R}_L - R_i\right)^2}$, por lo tanto

$$S_R = \sqrt{\frac{1}{4-1}\left[(330.25-335)^2\cdot(2)+(3330.25-320)^2+(330.25-331)^2\right]}\ [\Omega],$$

$$S_R = \pm 7.0887[\Omega], \quad \Delta R = \pm\frac{7.0887[\Omega]}{\sqrt{4}} = \pm 3.5444[\Omega].$$

6. En la figura se muestra un cronómetro semejante al que se utiliza en el laboratorio de Física Experimental. Se caracterizó dicho instrumento tomando mediciones con otro cronómetro y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine para el instrumento caracterizado:



a) El modelo matemático de su curva de calibración.
b) El porcentaje de precisión y el de exactitud para el valor patrón $t_P = 0.15$ [s].
c) El valor más representativo y su incertidumbre para el conjunto de mediciones del valor patrón $t_P = 0.30$ [s].
d) Su rango, resolución, legibilidad y sensibilidad.

t_P [s]	t_{L1} [s]	t_{L2} [s]	t_{L3} [s]	t_{L4} [s]
0.15	0.18	0.19	0.18	0.18
0.20	0.23	0.23	0.23	0.24
0.25	0.26	0.26	0.27	0.27
0.30	0.31	0.32	0.32	0.33

Resolución:

a) Para obtener el modelo matemático de la curva de calibración será necesario calcular los valores más representativos del conjunto de lecturas de cada valor patrón, por lo tanto:

t_P [s]	$\overline{t}_L$ [s]
0.15	0.1825
0.20	0.2325
0.25	0.265
0.30	0.32

El modelo matemático de la curva de calibración tendrá la forma: $t_L = m\ t_P + b$, donde la pendiente es $m = \dfrac{\Delta t_L}{\Delta t_p}$, por lo tanto $m = 0.89\left[\dfrac{s}{s}\right]$; la ordenada al origen es: $b = 0.0498[s]$, por lo tanto el modelo matemático es

$t_L[s] = 0.89\left[\dfrac{s}{s}\right]t_p[s] + 0.0498[s]$.

b) El porcentaje de precisión es $\%P = 100 - \%EP$, donde $\%EP = \left|\dfrac{\bar{t}_L - t_{ma}}{\bar{t}_L}\right| \times 100$,

$$\%EP = \left|\frac{0.1825 - 0.19}{0.1825}\right| \times 100 = 4.1096\%, \text{ entonces } \quad \%P = 95.8904\%;$$

el porcentaje de exactitud es $\%E = 100 - \%EE$, donde $\%EE = \left|\dfrac{t_p - \bar{t}_L}{t_p}\right| \times 100$,

$$\%EE = \left|\frac{0.15 - 10.1825}{0.15}\right| \times 100 = 21.6667\%, \text{ entonces } \quad \%E = 78.3333\%.$$

c) El valor más representativo corresponde al valor promedio, por lo tanto $\bar{t}_L = 0.32[s]$; la incertidumbre asociada al conjunto de mediciones está dada por

$\Delta R = \pm\dfrac{S_R}{\sqrt{n}}$, donde $n = 4$ y $S_t = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\left(\bar{R}_L - R_i\right)^2}$, por lo tanto

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{4-1}\left[(0.32 - 0.31)^2 + (0.32 - 0.32)^2 + (0.32 - 0.32)^2 + (0.32 - 0.33)^2\right]}\,[s] = \pm 0.0082[s]$$

Entonces $\Delta R = \pm\dfrac{0.0082[s]}{\sqrt{4}} = \pm 0.0041[s]$ y $\quad t_L = (0.32 \pm 0.0041)[s]$.

d) De acuerdo con la figura, el rango es de 0 a 1 [s]; la resolución es: 1[cs]; la legibilidad se puede considerar como buena y la sensibilidad es la pendiente de la curva de calibración, es decir
S = 0.89 [s/s].

7. En un laboratorio se desea caracterizar un instrumento para analizar un movimiento circular uniforme. Se midieron los valores de rapideces angulares (ω_L), se tomaron como referencia valores patrones (ω_P) calculados a partir de un modelo matemático y se obtuvo la tabla que se muestra. Con base en ello determine, en el SI, la sensibilidad del instrumento de medición para el rango de mediciones efectuado, así como el porcentaje de exactitud para el valor patrón $\omega_P = 16$ [rpm].

ω_P [rpm]	$\overline{\omega}_L$ [rad/s]
10	1.00
12	1.25
14	1.46
16	1.68

1 [rpm] = 1 [revolución/minuto]

ω_{L1} [rad/s]	ω_{L2} [rad/s]	ω_{L3} [rad/s]	ω_{L4} [rad/s]
1.67	1.69	1.68	1.68

Resolución:

Poniendo las dos primeras columnas de la tabla en el SI, tenemos que

ω_P [rad/s]	$\overline{\omega}_L$ [rad/s]
1.0472	1
1.2566	1.25
1.4661	1.46
1.6755	1.68

por lo tanto el modelo matemático tendrá la forma $\omega_L = m\,\omega_P + b$, cuya pendiente es la sensibilidad del instrumento, entonces

$$m = S = 1.0743\left[\frac{rad/s}{rad/s}\right].$$

Para calcular el porcentaje de exactitud solicitado, primero calcularemos el porcentaje de error de exactitud, es decir

$$\%EE = \left|\frac{\omega_p - \overline{\omega}_L}{\omega_p}\right| \times 100, \qquad \%EE = \left|\frac{1.6755 - 1.68}{1.6755}\right| \times 100 = 0.2686\%,$$

como $\%E = 100 - \%EE$, entonces $\%E = 99.7314\%$.

8. Para caracterizar un medidor de frecuencias se generaron varias ondas y se midieron sus frecuencias (f_L). Se calcularon los valores de los periodos patrones (τ_P) que corresponden a dichas frecuencias y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine, en el SI y utilizando el método de mínimos cuadrados:

τ_P [cs]	6	12	18
f_L [Hz]	16	8	5

a) La sensibilidad del instrumento de medición.
b) El modelo matemático de la curva de calibración.
c) El periodo patrón que se tendría para la frecuencia leída $f_L = 10$ [Hz].

d) El porcentaje de exactitud para la lectura de la frecuencia cuyo periodo patrón es τ_P = 18 [cs].

Resolución:

a) El modelo matemático de la curva de calibración tiene la forma $f_L = m\, f_P + b$, donde la pendiente es la sensibilidad, por lo tanto se calculará la pendiente del modelo a partir del método de mínimos cuadrados; dicha pendiente es $m = \dfrac{\Delta f_L}{\Delta f_p}$, para calcular los valores de las frecuencias patrones se sabe que $f_p = \dfrac{1}{\tau_p}$, por lo tanto

τ_P [s]	0.06	0.12	0.18
f_p[Hz]	16.6667	8.3333	5.5556
f_L[Hz]	16	8	5

El número de mediciones es 3, por lo tanto n = 3, además $\sum f_P = 30.5556[\text{Hz}]$ y $\sum f_L = 29[\text{Hz}]$,

$f_p \cdot f_L\left[\text{Hz}^2\right]$	$f_p^{\,2}\left[\text{Hz}^2\right]$
266.6672	277.7789
66.6664	69.4439
27.778	30.8674
$\sum f_p \cdot f_L = 361.1116$	$\sum f_p^{\,2} = 378.0875$

con las expresiones del método de mínimos cuadrados que se encuentran en el apéndice de este Cuaderno de Ejercicios, tenemos

$$m = \frac{(3)(361.1116)-(30.5556)(29)\left[\text{Hz}^2\right]}{(3)(378.0875)-(30.5556)^2\left[\text{Hz}^2\right]} = \frac{197.2224}{200.6178}\left[\frac{\text{Hz}}{\text{Hz}}\right] = 0.9831 \text{ [Hz/Hz]},$$ por lo tanto

$$S = 0.9831\left[\frac{\text{Hz}}{\text{Hz}}\right].$$

b) Para obtener el modelo matemático hace falta calcular la ordenada al origen, la cual está dada por

$$b = \frac{(29)(378.0875)-(361.116)(30.5556)[\text{Hz}]}{(3)(378.0875)-(30.5556)^2} = \frac{-69.4441[\text{Hz}]}{200.3178} = -0.3462 \text{ [Hz]},$$

de esta manera el modelo matemático será

$$f_L[\text{Hz}] = 0.9831\left[\frac{\text{Hz}}{\text{Hz}}\right] f_p[\text{Hz}] - 0.3462[\text{Hz}].$$

c) El periodo patrón se puede calcular a partir de la frecuencia patrón correspondiente, la cual, a su vez, se puede obtener del modelo matemático del inciso anterior, es decir

$$f_p[\mathrm{Hz}] = \frac{f_L[\mathrm{Hz}] + 0.3462[\mathrm{Hz}]}{0.9831\left[\dfrac{\mathrm{Hz}}{\mathrm{Hz}}\right]} = \frac{10 + .03462}{0.9831}[\mathrm{Hz}] = 10.5241[\mathrm{Hz}];$$

como $\tau_p = \dfrac{1}{f_p}$, entonces $\tau_p = 0.09502[\mathrm{s}]$.

d) Como se conoce el periodo $\tau_p = 0.18[\mathrm{s}]$, entonces se calculará primero la frecuencia patrón correspondiente, esto es; $f_p = \dfrac{1}{\tau_p} = (0.18[\mathrm{s}])^{-1} = 5.5556[\mathrm{Hz}]$, el porcentaje de exactitud es $\%E = 100 - \%EE$, entonces $\%EE = \left|\dfrac{f_p - f_L}{f_p}\right| \times 100$,

$$\%EE = \left|\frac{5.5556 - 5}{5.5556}\right| \times 100 = 10.0007\%,$$

por lo tanto $\%E = 89.9993\%$.

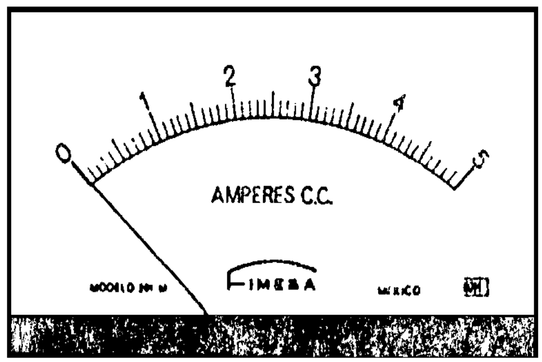
Física e ingeniería

Ejercicios propuestos

1. Con el instrumento de medición que se muestra en la figura, se tomaron las lecturas indicadas en la tabla, con base en ello, determine:

a) El rango y la resolución del instrumento.
b) La precisión del instrumento para el valor real de 4.5 [A].
c) La exactitud del instrumento para el valor real de 4.5 [A].
d) La sensibilidad.

V_P [A]	$\overline{V}_L$ [A]					
0.5	0.70					
1.0	0.90					
1.5	1.40					
2.0	2.10					
2.5	2.60					
3.0	3.10					
3.5	3.50					
4.0	4.10					
4.5	4.60	4.40	5.0	4.60	4.6	4.4
5.0	5.10					

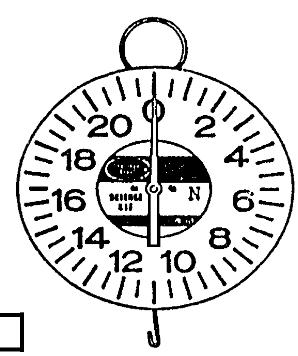


2. Con el dinamómetro que se muestra en la figura se tomaron las lecturas indicadas en la tabla, con base en esto, determine:

a) El rango y la resolución del dinamómetro.
b) La sensibilidad del dinamómetro, en el intervalo de las mediciones.
c) El porcentaje de error de exactitud, al medir una fuerza cuyo valor real es de 18 [N].
d) El porcentaje de error de precisión, al medir una fuerza cuyo valor real es de 18 [N].

F_P = fuerza patrón.
F_L = fuerza leída.

F_P [N]	$\overline{F}_L$ [N]					
2	2.1					
6	5.9					
10	10.2					
14	14.1					
18	18.1	18.0	17.5	18	18.5	18.5



3. En un laboratorio se caracterizó un termómetro de mercurio. Parte de las mediciones se muestran en la tabla. Con base en ello, determine:

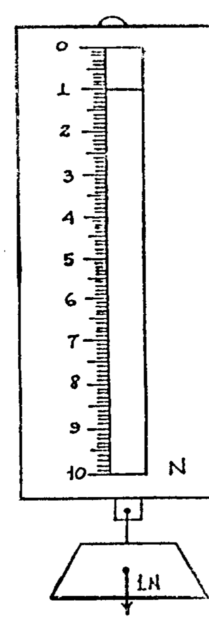
a) El modelo matemático de la curva de calibración.
b) La sensibilidad del termómetro.
c) La cuarta lectura para el valor patrón T_P = 6 [°C], es decir el valor de w.
d) El porcentaje de exactitud para el valor patrón T_P = 2 [°C].
e) El porcentaje de precisión para el valor patrón T_P = 4 [°C].
f) La resolución más probable del termómetro empleado.
g) La incertidumbre para el valor patrón del inciso e.
h) La expresión dimensional, en el SI, de las constantes del modelo matemático del inciso a.

T_P [°C]	$\overline{T}_L$ [°C]	T_{L1} [°C]	T_{L2} [°C]	T_{L3} [°C]	T_{L4} [°C]
– 4	– 3.75	– 4	– 4	– 4	– 3
– 2	– 2	– 3	– 1	– 3	– 1
0	0.25	1	0	0	0
2	2.5	2	3	2	3
4	3.75	3	4	4	4
6	5.5	6	7	4	w

4. Se desean obtener las características de un dinamómetro utilizando pesas patrones. De las mediciones realizadas se obtuvo la tabla que se muestra. Con base en ésta y la figura del dinamómetro determine:

V_P	V_{L1}	V_{L2}	V_{L3}	V_{L4}	V_{L5}	V_{L6}	V_{L7}
0	0	0	0	0	0	0	0
0.5	0.6	0.75	0.6	0.5	0.4	0.7	0.5
1.0	1.1						
2.0	1.9						
3.0	3.0						
4.0	4.1						
5.0	4.9						

V_P = valor patrón [N].
V_L = valor leído [N].



a) El rango y la resolución del dinamómetro.
b) El porcentaje de exactitud.
c) El porcentaje de precisión.
d) La sensibilidad en el intervalo de 0 a 5 [N].

5. En un laboratorio de Física, en el cual la aceleración gravitatoria es 9.78 [m/s^2] se desea caracterizar una balanza; al medir nueve veces la masa de un peso patrón de 20 [N] se obtuvieron las lecturas que se muestran; adicionalmente se realizaron otras mediciones con otros pesos patrones.

Lectura	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[kg]	2.05	2.10	2.03	2.10	2.01	2.03	2.00	2.10	2.05

Peso patrón [N]	5	10	15	20
Masa leída promedio [kg]	0.5102	1.0260	1.5285	2.0522

Con base en esta información determine para la balanza en estudio:

a) Su porcentaje de exactitud cuando se utilizó el peso patrón de 20 [N].
b) Su porcentaje de precisión para el valor patrón anterior.
c) Su sensibilidad.
d) La ecuación de su curva de calibración.
e) El valor más representativo de la masa del peso patrón de 20 [N] incluyendo su incertidumbre.

6. Un termómetro con rango de – 10°C a 110°C y resolución de 1°C fue utilizado para la medición de temperatura de una mezcla de sustancias. Con el objeto de cuantificar las características de dicho termómetro se elaboran las tablas siguientes:

valor patrón	T_P[ºC]	–5	0	5	10	15	20	30	40	50	60
valor promedio	T_L[ºC]	–5.05	0	4.95	10.10	15.05	20.15	30.05	39.95	49.90	60.05

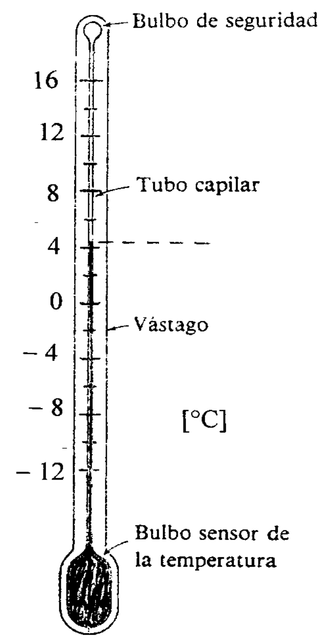
T_P[ºC]	T_{L1}[ºC]	T_{L2}[ºC]	T_{L3}[ºC]	T_{L4}[ºC]	T_{L5}[ºC]
37.0	36.5	37.0	37.5	36.0	37.0

Con base en las tablas de datos determine:

a) El modelo matemático de la curva (recta) de calibración del instrumento.
b) La sensibilidad del instrumento de medición.
c) La exactitud del termómetro para el valor patrón de 37 [°C].
d) La precisión del termómetro para el valor patrón de 37 [°C].
e) El valor más representativo con su incertidumbre para el valor patrón de 37 [°C].

7. En el laboratorio de un instituto de investigación se realizaron mediciones de temperaturas controladas (patrones) por medio de un termómetro como el que se muestra en la figura, obteniéndose los datos que se muestran a continuación:

T_P [°C]	$\overline{T}_L$ [°C]	T_1 [°C]	T_2 [°C]	T_3 [°C]	T_4 [°C]
-10	-10	-8	-10	-12	-10
-6	-5	-4	-4	-6	-6
-2	-1	0	-2	-2	0
2	1.5	0	2	2	2
6	5.5	4	6	4	8

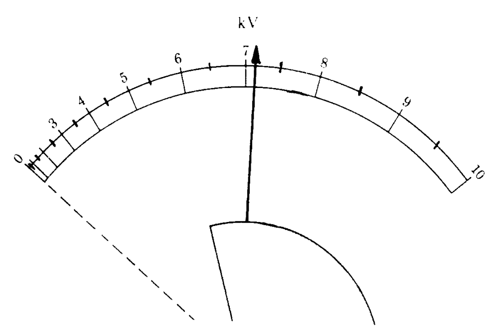


Para el termómetro, determine:

a) Rango, resolución y la lectura que indica la figura.
b) La exactitud para la temperatura patrón de 2 [°C].
c) La sensibilidad en el intervalo de experimentación.
d) La precisión para la temperatura patrón de –6 [°C].
e) La ecuación de la curva de calibración.

8. En un laboratorio se caracterizó un voltímetro electrostático como el que se muestra en la figura. Se le aplicaron diversas diferencias de potencial (voltajes) y se registraron las lecturas que se indican en la tabla. Con base en ello, determine:

a) El rango, la resolución del voltímetro, así como la lectura que indica.
b) El modelo matemático de la curva de calibración del instrumento de medición.
c) El significado físico de la pendiente del modelo matemático anterior, así como su expresión dimensional en el SI:
d) El error de precisión para el valor patrón V_P = 9 000 [V].
e) El porcentaje de exactitud para el valor patrón anterior.
f) La incertidumbre asociada al valor patrón V_P = 9 000 [V].



V_P [V]	$\overline{V}_L$ [kV]				
0	0.5				
3 000	3.125				
6 000	6.5	V_{L1} [kV]	V_{L2} [kV]	V_{L3} [kV]	V_{L4} [kV]
9 000	8.875	8.5	9	8.5	9.5

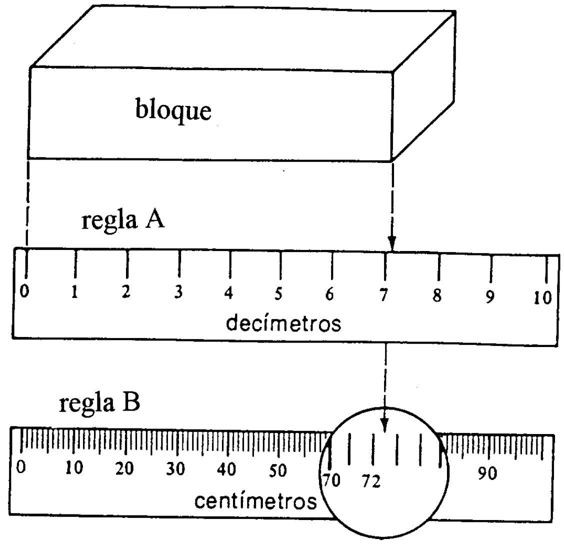
9. Con la regla B mostrada se midió la longitud del bloque de la figura, obteniéndose la tabla 1. Adicionalmente con la regla B se tomaron varias lecturas para diferentes valores patrones, se trabajaron los datos obtenidos y se obtuvo la tabla 2.

Tabla 1. (Valores en cm)

Longitud del bloque (valor real)	V_{L1}	V_{L2}	V_{L3}	V_{L4}	V_{L5}
72.3	72	73	72.5	72	72.5

Tabla 2.

V_P [cm]	10	20	30	40	50	60	70	80
$\overline{V}_L$ [cm]	10.5	19.6	29.0	40.2	50.1	60	70.3	80.2



Con base en la figura y en la tabla, obtenga:

a) El rango y la resolución para ambas reglas.
b) La exactitud de la regla B si el valor verdadero de la longitud del bloque es 72.3 [cm].
c) La precisión de la regla B si el valor verdadero de la longitud del bloque es 72.3 [cm].
d) La sensibilidad de la regla B.

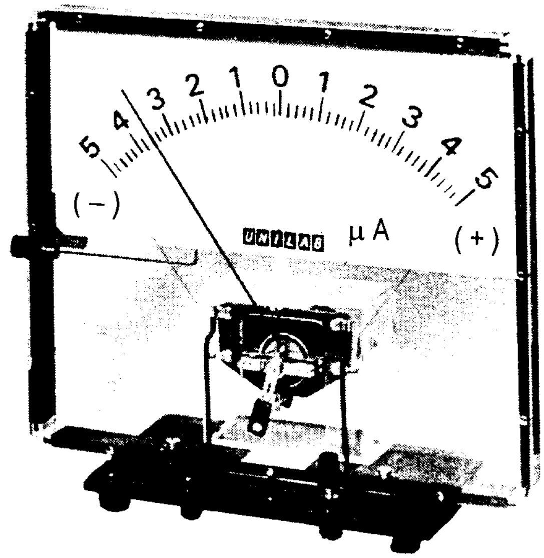
10. Se desea caracterizar un termómetro; para ello se proporcionó a una sustancia energía en forma de calor y se tomaron varias lecturas de temperatura de la sustancia con el termómetro para compararlas con valores de temperatura teóricos (valores patrones). Parte de los datos se muestran en la tabla. Con base en ello, determine:

a) El porcentaje de exactitud para el valor patrón de 32 °C.
b) El porcentaje de precisión para el valor patrón anterior.
c) La sensibilidad del termómetro utilizado.
d) El modelo matemático de la curva de calibración de dicho instrumento.
e) El valor más representativo y su incertidumbre asociada en la medición del valor patrón de 32 °C.

Q [kJ]	T_P [°C]	$\overline{T}_L$ [°C]				
0	22	22				
2.093	24	23.5				
4.186	26	25				
6.279	28	27				
8.372	30	29.5				
10.465	32	31.5	31	32	32.5	30.5

11. En un laboratorio de física se caracterizó un microamperímetro, instrumento que sirve para medir corrientes eléctricas muy pequeñas, como el que se muestra en la figura. Parte de las mediciones que se tomaron se muestran en la tabla. Con base en ello, determine para el micro-amperímetro:

a) El rango y la resolución, así como la lectura que muestra.
b) El modelo matemático de la curva de calibración.
c) El valor leído que se tendría si el valor patrón fuese I_P = 3 200 [nA].
d) El significado físico de la pendiente y de la ordenada al origen del modelo matemático del inciso b y la expresión dimensional de cada una de ellas, en el SI.
e) El porcentaje de exactitud que presentó el instrumento utilizado en el laboratorio para el valor patrón I_P = 0.002 [mA].
f) El porcentaje de precisión para el valor patrón del inciso anterior.

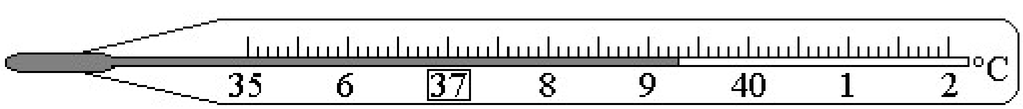


I_P [mA]	$\overline{I}_L$ [μA]				
− 0.003	− 2.85				
− 0.002	− 2.22				
− 0.001	− 0.88				
0	0.2				
0.001	1.1	I_{L1} [μA]	I_{L2} [μA]	I_{L3} [μA]	I_{L4} [μA]
0.002	2.05	2	2.2	2.2	1.8

12. En un laboratorio se busca caracterizar un termómetro para controlar cultivos de microorganismos. El termómetro es como el que se muestra en la figura con el cual se obtuvieron las mediciones de la tabla, contrastadas con temperaturas controladas con otro equipo más sofisticado que serán consideradas como temperaturas patrón; con base en la figura y en la tabla, determine para el termómetro:

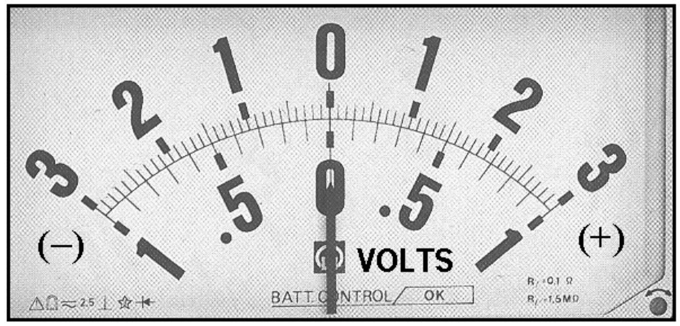
a) El rango, la resolución y la lectura indicada.
b) El porcentaje de exactitud si la temperatura patrón es T_P = 42 [°C].
c) El porcentaje de precisión si la temperatura patrón es T_P = 38 [°C].
d) La sensibilidad.
e) La ecuación de la curva de calibración.
f) La lectura más representativa, incluyendo su incertidumbre, para el valor patrón T_P = 36 [°C].

T_P [°C]	$\overline{T}_L$ [°C]	T_{L1} [°C]	T_{L2} [°C]	T_{L3} [°C]	T_{L4} [°C]
36	36.05	36.1	36.1	35.9	36.1
38	37.95	37.8	37.9	38.0	38.1
40	40.05	39.9	40.2	40.0	40.1
42	41.9	41.8	42.0	41.9	41.9



13. En la figura se muestra la carátula de un voltímetro que se desea caracterizar. Sus terminales se conectaron a un resistor, se calcularon los valores teóricos de diferencia de potencial (voltaje) y se efectuaron las mediciones que se muestran en la tabla. Determine:

V_P [V]	$\overline{V}_L$ [V]	V_{L1} [V]	V_{L2} [V]	V_{L3} [V]	V_{L4} [V]
– 2	– 2.075	– 2.1	– 2.1	– 2.0	– 2.1
– 1	– 1.125	– 1.2	– 1.2	– 1.1	– 1.0
0	– 0.05	– 0.1	0	– 0.1	0
1	0.925	0.9	0.9	0.9	1.0
2	1.825	1.7	1.8	1.9	1.9



a) Las características estáticas, de la escala superior y de la inferior, del instrumento utilizado.
b) La ecuación de la curva de calibración y la sensibilidad del instrumento.
c) El porcentaje de exactitud para el valor patrón $V_P = -1$ [V].
d) El porcentaje de precisión para el valor patrón $V_P = 2$ [V].
e) El valor más representativo de las mediciones y su incertidumbre asociada para el valor patrón $V_P = 1$ [V].

14. En un laboratorio se caracterizó un termómetro, utilizando como referencia (valores patrones) las lecturas de un termómetro como el que se muestra en la figura. Parte de las mediciones se muestran en la tabla. Accidentalmente una de las personas que participaron en el experimento manchó la tabla; si se sabe que el valor promedio oculto resultó menor que el valor patrón correspondiente, determine:
a) El valor más representativo de las lecturas correspondientes al valor patrón $T_P = 23$ [°C].
b) La temperatura más alejada. del valor promedio del inciso anterior, si se sabe que el valor de la primera es mayor que el promedio.
c) La sensibilidad del instrumento de medición caracterizado, suponiendo que el valor promedio oculto por la mancha nos diera un porcentaje de error de exactitud igual a cero.
d) El modelo matemático de la curva de calibración del termómetro, de acuerdo con el inciso anterior.
e) La incertidumbre del conjunto de mediciones del valor patrón $T_P = 32$ [°C].

T_P [°C]	17	20	23	26	29	32
$\overline{T}_L$ [°C]	17.5	20.3		26.4	28.8	32.5
%EE			2.609			
%EP			1.786			

T_P [°C]	T_{L1} [°C]	T_{L2} [°C]	T_{L3} [°C]	T_{L4} [°C]	T_{L5} [°C]
32	32.6	32.8	32.2	32.4	32.5

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) 0 a 5 [A]; 0.1 [A]
   b) %P = 91.3 %
   c) %E = 97.78 %
   d) S = 1.0145 [A/A]

2. a) 0 a 22 [N]; 0.5 [N]
   b) S = 1.005 [N/N]
   c) %EE = 0.5556 %
   d) %EP = 3.3149 %

3. a) T_L [°C]= 0.9393 [°C/°C] T_P [°C] + 0.1024 [°C]
   b) S = 0.9393 [1]
   c) w = 5 [°C]
   d) %E = 75 %
   e) %P = 80%
   f) 1 [°C]
   g) ± 0.25 [°C]
   h) dim(m) = 1; dim(b) = Θ

4. a) 0 a 10 [N]; 0.1 [N]
   b) %E = 84.3%
   c) %P = 69.14%
   d) S = 0.9823 [N/N]

5. a) %E = 99.6479%
   b) %P = 97.4564%
   c) S = 1.0031 [kg/kg]
   d) m_L [kg]= 1.0031 [kg/kg] m_P [kg] – 0.0029 [kg]
   e) m = 2.0522 ± 0.0131 [kg]

6. a) T_L [°C] = 0.9997 [1] T_P [°C] + 0.0209 [°C]
   b) S = 0.9997 [°C/°C]
   c) %E = 99.46%
   d) %P = 97.83%
   e) T = 36.8 ± 0.2549 [°C]

7. a) – 12 a 16 [°C]; 2 [°C]; 4 [°C]
   b) %E = 75 %
   c) S = 0.9375 [°C/°C]
   d) %P = 80 %
   e) T_L [°C]= 0.9375 [1] T_P [°C] + 0.075 [°C]

8. a) 0 a 10 [kV]; 0.5 [kV]; 7 [kV]

b) V_L [V]= 0.95 [1] V_P [V] + 475 [V]
c) m = S; dim (m) = [1]
d) %EP = 7.0423%
e) %E 98.6111%
f) $\Delta V = \pm$ 0.2394 [kV]

9. a) Regla A: 0 a 10 [dm]; 1 [dm]; regla B: 0 a 100 [cm]; 1 [cm]
   b) %E = 99.86 %
   c) %P = 99.17 %
   d) S = 1.0051 [cm/cm]

10. a) %E = 98.44 %
    b) %P = 96.83 %
    c) S = 0.9643 [°C/°C]
    d) T_L [°C]= 0.9643 [1] T_P [°C] + 0.381 [°C]
    e) T = 31.5 ± 0.4565 [°C]

11. a) – 5 a 5 [μA]; 0.2 [μA] ; – 3.6 [μA]
    b) I_L [μA] = 1.0154 [μA/μA] I_P [μA] + 0.0744 [μA]
    c) I_L = 3.3237 [μA]
    d) m = S; b = error sistemático; dim (m) = 1; dim (b) = I
    e) %E = 97.5 %
    f) %P = 87.8049%

12. a) 35 a 42 [°C]; 1 [°C]; 39.3 [°C]
    b) %E = 99.7619%
    c) %P = 99.6047%
    d) S = 0.9825 [1]
    e) T_L [°C] = 0.9825 [°C/°C] T_P [°C] + 0.67 [°C]
    f) T_L = 36.05 ± 0.05 [°C]

13. a) Escala superior; rango: − 3 a 3 [V], resolución: 0.1 [V], legibilidad: buena.
    Escala inferior; rango − 1 a 1 [V], resolución 0.1 [V], legibilidad: buena.
    b) V_L [V] = 0.985 [V/V] V_P [V] – 0.1 [V] ; S = 0.985 [V/V]
    c) %E = 87.5%
    d) %P = 93.1507%
    e) V_L = 0.925 ± 0.025 [V]

14. a) $\overline{T_L}$ = 22.4 [°C]
    b) T_{ma} = 22.8 [°C]
    c) S = 0.9895 [°C/°C]
    d) T_L [°C] = 0.9895 [°C/°C] T_P [°C] + 0.5167 [°C]
    e) $\Delta T = \pm$ 0.1 [°C]

Gradiente de presión

Ejercicios resueltos

1. En un experimento de hidrostática se midió la masa (m) de un recipiente de vidrio que contenía un determinado volumen (V) de un líquido, con una balanza perfectamente calibrada y se obtuvo la tabla que se muestra. Sabiendo que la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 [m/s^2], determine, en el SI:

a) El modelo matemático lineal de la masa medida en función del volumen del líquido, es decir m = f (V).
b) La masa del recipiente y la masa que tendrían 25 [mℓ] del líquido.
c) La presión manométrica a 2 [cm] de profundidad, dentro del líquido.

V [mℓ]	m [kg]
20	0.0936
30	0.1004

1 [mℓ] = 1 [cm^3]
$\rho_{\text{agua}} = 10^3$ [kg·m^{-3}]

Resolución:

a) Como el modelo matemático debe estar en el SI, primero convertiremos los valores de volumen en [mℓ] a valores en [m^3], esto es

V [m^3]	m [kg]
0.00002	0.0936
0.00003	0.1004

El modelo matemático solicitado tiene la forma m = *m* V + b, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$, $\quad m = \dfrac{(0.1004 - 0.0936)[\text{kg}]}{(0.00003 - 0.00002)[\text{m}^3]} = 680\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$;

para calcular la ordenada al origen, podemos considerar una pareja ordenada, es decir

$$b = m_1 - m\,V_1 = 0.0936[\text{kg}] - \left(680\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]\right)\cdot\left(0.00002\left[\text{m}^3\right]\right) = 0.08[\text{kg}];$$

entonces el modelo matemático es $\quad m[\text{kg}] = 680\left[\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]V\left[\text{m}^3\right] + 0.08[\text{kg}]$.

b) Si el volumen de la sustancia es cero, entonces la masa que registra la balanza es la del recipiente, por lo tanto, de acuerdo con el modelo matemático del inciso anterior podemos decir que b = $m_{\text{recipiente}}$, es decir $m_{\text{recipiente}}$ = 0.08 [kg]; por otra parte, sabemos que la densidad se puede calcular con el cociente $\rho = \dfrac{m}{V}$, de donde la masa estaría dada por m = ρ V. Si comparamos esta última expresión con el modelo matemático del inciso anterior, tenemos que *m* = $\rho_{\text{líquido}}$, entonces

m = $\rho_{\text{líquido}}$ V; $m = \left(680\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]\right)\cdot\left(0.000025\left[\text{m}^3\right]\right) = 0.017\left[\text{kg}\right].$

c) La presión manométrica la podemos calcular como

P_{man} = = $\rho_{\text{líquido}}$ g z; entonces

$$P_{man} = \left(680\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]\right)\cdot\left(9.78\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]\right)\left(0.02\left[\text{m}\right]\right) = 133.008\left[\text{Pa}\right].$$

2. Dentro de un tanque rígido y cerrado a la atmósfera hay dos fluidos: un líquido desconocido y aire a una cierta presión. Para tratar de identificar dicho líquido se efectuaron mediciones de presión relativa (P_r) dentro del líquido, a diferentes profundidades (z). Los resultados se muestran en la tabla, si la presión relativa se midió con respecto al aire que rodea al tanque, obtenga en el SI:

P_r [Pa]	z [cm]
–146.25	4
20.00	6
186.25	8

a) El modelo matemático que relaciona a la presión relativa P_r con la profundidad z. Utilice el método de mínimos cuadrados.

b) La presión absoluta del aire contenido en el tanque si la presión atmosférica del lugar es 100 [kPa].

Resolución:

a) El modelo matemático solicitado tiene la forma $P_r = m\,z + b$, cuya pendiente es

$m = \frac{\Delta P_r}{\Delta z}$;

elaboraremos una tabla donde estén las sumas necesarias para emplear las expresiones del método de mínimos cuadrados:

P_r [Pa]	z[m]	Pr · z [Pa · m]	z^2 [m^2]
-146.25	0.04	5.85	0.0016
220	0.06	1.2	0.0036
186.25	0.08	14.9	0.0064
$\sum P_r = 60$	$\sum z = 0.18$	$\sum P_r\ z = 10.25$	$\sum z^2 = 0.0116$

como el número de lecturas es de tres, entonces n = 3; calculando la pendiente con las expresiones que aparecen en el apéndice de este Cuaderno de Ejercicios tenemos

$$m = \frac{(3)\cdot(10.25)-(0.18)\cdot(60)}{(3)\cdot(0.0116)-(0.08)^2} = 8312.5\left[\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]$$ y la ordenada al origen es

$$b = \frac{(60)\cdot(0.0116)-(10.25)\cdot(0.18)}{(3)\cdot(0.0116)-(0.08)^2} = -478.75\,[\text{Pa}],$$

entonces el modelo matemático es $P_r[\text{Pa}] = 8312.5\left[\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]\cdot z[\text{m}] - 478.75[\text{Pa}]$.

b) La presión relativa del aire contenido en el tanque se puede obtener con el modelo matemático anterior, es decir, es la presión del líquido en su superficie, por lo tanto la ordenada al origen representa la presión relativa del aire:

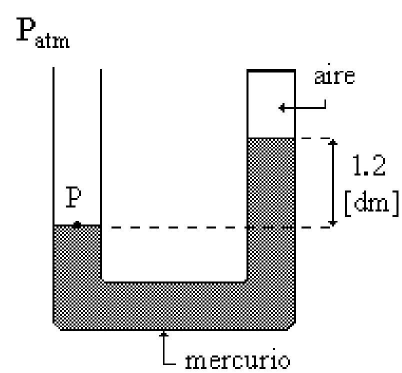
$P_r[\text{Pa}] = 8312.5\left[\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]\cdot(0\,[\text{m}]) - 478.75[\text{Pa}]$ = – 478.75 [Pa], como b < 0 la presión del aire es una presión manométrica negativa o una presión vacuométrica, entonces $P_{abs} = P_{atm} - P_{vac}$, por lo tanto $P_{abs\,aire} = (100\,000[\text{Pa}]) - (478.75[\text{Pa}]) = 99\,521.25[\text{Pa}]$.

3. En un tubo en forma de U, se tienen varios fluidos; el extremo de la izquierda está abierto a la atmósfera y el de la derecha está cerrado. Sabiendo que el líquido contenido en el tubo es mercurio, determine en el SI:

a) La presión absoluta y la presión manométrica en el punto P.

b) La presión manométrica del aire contenido en el extremo derecho del tubo en U.

P_{atm} = 58 [cm de Hg]; g = 9.78 [m·s^{-2}];
$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]; δ_{Hg} = 13.595 [1]



Resolución:

a) Como el punto P está sobre la superficie del líquido y ese extremo del tubo está abierto a la atmósfera, entonces $P_{man\,p} = 0[\text{Pa}]$

y la presión absoluta es la presión atmosférica, es decir $P_{abs\,p} = P_{atm}$; por lo tanto $P_{atm} = \rho_{Hg}\, g\, h_{Hg}$, en términos de la presión relativa del mercurio tenemos $P_{atm} = \delta_{Hg}\, \rho_{agua}\, g\, h_{Hg}$,

$$P_{atm} = (13.595)\cdot\left(10^3\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\cdot(0.58[m]) = 77116.28[Pa] \quad ,$$

$$P_{abs\,p} = 77116.28[Pa].$$

b) Llamaremos punto "a" al punto que está sobre la superficie del líquido en el extremo derecho del tubo, aplicando la ecuación de gradiente de presión entre los puntos "P" y "a" tenemos

$P_p - P_a = -\rho_{Hg} g(z_p - z_a)$, de esta última expresión despejamos la presión en "a":

$P_a = P_p + \rho_{Hg}(z_p - z_a)$, en términos de la presión relativa del mercurio, tenemos

$P_a = P_p + \delta_{Hg}\rho_{agua} g(z_p - z_a)$, entonces la presión manométrica del punto "a" será

$$P_a = (0[Pa]) + (13.595)\cdot\left(10^3\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\cdot(0-0.12)[m] ,$$

$$P_{man\,a} = -15955.09[Pa].$$

4. Se realizaron dos experimentos en un laboratorio, en el cual la aceleración gravitatoria es 9.79 [m/s^2], con cierto líquido. En el primer experimento se determinó la relación existente entre masa y volumen del líquido, y se obtuvo el modelo matemático siguiente:

$$m\ [kg] = 720\ [kg/m^3]\ V\ [m^3] + 0.5\ [kg].$$

Posteriormente se colocó 1 [kg] de dicha sustancia en un recipiente cilíndrico de 10 [cm] de diámetro y se realizó el segundo experimento, midiendo la presión manométrica (P_{man}) en función de la profundidad (z). Considerando que la densidad del agua es 10^3 [kg/m^3] y la del mercurio es 13 600 [kg/m^3], determine:

a) La densidad relativa y la magnitud del vector peso específico del líquido utilizado en el experimento.
b) El modelo matemático experimental que relaciona a la presión manométrica en función de la profundidad sabiendo que la ordenada al origen de este modelo es 16 [Pa].
c) El volumen total del líquido en el recipiente, en litros.
d) La presión absoluta en el fondo del recipiente, sabiendo que la presión atmosférica del lugar es 68 [cm de Hg].

Resolución:

a) El modelo matemático proporcionado tiene la forma m = *m* V + b, sabemos que la densidad del líquido está dada por $\rho_L = \frac{m}{V}$, de donde la masa es m = ρ_L V, entonces si comparamos esta última expresión con el modelo matemático tenemos que la pendiente de dicho modelo es la densidad del líquido, por lo tanto $\rho_L = 750\left[\frac{kg}{m^3}\right]$;

por lo tanto la densidad relativa del líquido es $\delta_L = \frac{\rho_L}{\rho_A} = \frac{720\left[\frac{kg}{m^3}\right]}{10^3\left[\frac{kg}{m^3}\right]} = 0.72[1]$,

con la densidad podemos calcular el módulo del vector peso específico, es decir

$$\gamma = \rho g = \left(720\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.79\left[\frac{m}{s^2}\right]\right) = 7048.8\left[\frac{N}{m^3}\right].$$

b) Este modelo matemático tiene la forma $P_{man} = m\ z + b$, cuya pendiente es el módulo del vector peso específico, es decir $m = \gamma$, entonces

$P_{man} = 7078.8\left[\frac{N}{m^3}\right]\cdot z[m] + b[Pa]$, como b =16 [Pa],

el modelo matemático es

$$P_{man}[Pa] = \left(7048.8\left[\frac{Pa}{m}\right]\right)\cdot z[m] + (16\ [Pa])\ .$$

c) La densidad del líquido es $\rho_L = \frac{m_L}{V_L}$; despejando el volumen tenemos $V_L = \frac{m_L}{\rho_L}$,

por lo tanto $V_L = \frac{1[kg]}{720[kg/m^3]} = 1.3889\times10^{-3} m^3\left(\frac{10^3\ dm^3}{1\ \ m^3}\right) = 1.3889[dm^3]$,

como 1 [dm^3] = 1 [ℓ], entonces $V_L = 1.3889[\ell]$.

d) La presión absoluta se puede calcular como $P_{abs} = P_{man} + P_{atm}$, por lo tanto será necesario calcular la presión atmosférica en [Pa] con ayuda de la altura barométrica proporcionada

$$P_{atm} = \rho_{Hg}\ g\, h_{bar} = \left(13600\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.79\left[\frac{m}{s}\right]\right)(0.68[m]) = 90567.92[Pa]\ ,$$

la altura que ocupa el líquido se puede calcular con el volumen del mismo, es decir $V_L = \pi\ r^2\ z = ¼\ \pi\ d^2\ z$, de esta expresión despejaremos la altura z:

$$z = \frac{4\,V_L}{\pi\,d^2} = \frac{4\left(1.3889\times10^{-3}[m^3]\right)}{\pi(0.1[m])^2} = 0.1768[m],$$

sustituyendo este valor en el modelo matemático obtenido en el inciso anterior tenemos que la presión manométrica en el fondo del recipiente es

$$P_{\text{man f}} = \left(7\,048.8\left[\frac{Pa}{m}\right]\right)\cdot\left(0.1768[m]\right)+\left(16\,[Pa]\right)=1262.2278[Pa]\ ;$$

teniendo la presión manométrica, podemos calcular la presión absoluta, es decir

$$P_{abs\,f} = \left(1\,262.2278[Pa]\right)+90\,537.92[Pa]=91800.15[Pa].$$

5. Dentro de un tanque cilíndrico de 3.2 [m^3], cerrado herméticamente se tienen dos fluidos: uno líquido y uno gaseoso. Se midió la presión absoluta (P) en función de la profundidad (z) dentro del líquido contenido en el tanque y se obtuvo la tabla que se muestra.
Sabiendo que la presión atmosférica del lugar es 77 000 [Pa], que la aceleración gravitatoria es 9.78 [m/s^2] y que la densidad del agua es 10^3[kg/m^3], determine, en el SI:

a) El modelo matemático que relaciona a la presión absoluta en función de la profundidad, es decir P = f(z).
b) La densidad relativa del líquido contenido en el tanque.
c) La presión manométrica del fluido gaseoso que está dentro del tanque.

z [m]	P [kPa]
0.4	151.660
0.6	152.990

Resolución:

a) El modelo matemático tiene la forma P = m z + b, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta P}{\Delta z}$, por lo tanto la pendiente es $m = \dfrac{(152.99-151.66)10^3[\text{Pa}]}{(0.6-0.4)[\text{m}]} = \dfrac{1330[\text{Pa}]}{0.2[\text{m}]} = 6\,647\left[\dfrac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]$, para calcular la ordenada al origen utilizaremos uno de los puntos de la tabla, es decir

$$\text{b} = \text{P}_2 - m\,\text{z}_2 = \left(152.990[\text{Pa}]\right)-\left(6\,647\left[\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]\right)\cdot\left(0.6[\text{m}]\right)=149\ 001.8[\text{Pa}]\ ,$$

entonces el modelo matemático es $\text{P}[\text{Pa}] = 6\ 647\left[\dfrac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]\cdot \text{z}[\text{m}]+149\ 001.8[\text{Pa}]$.

b) La pendiente del modelo matemático anterior es el módulo del vector peso específico, es decir

$m = \left| \vec{\gamma} \right|$, además $\gamma = \rho g$, por lo tanto $\rho = \dfrac{\gamma}{g} = \dfrac{6\ 647 \left[\dfrac{N}{m^3} \right]}{9.78 \left[\dfrac{m}{s^2} \right]} = 679.6524 \left[\dfrac{kg}{m^3} \right]$, para calcular la densidad relativa del líquido nos apoyaremos en la densidad del agua, es decir

$$\delta_L = \frac{\rho_L}{\rho_{agua}} = \frac{679.6524 \left[\dfrac{kg}{m^3} \right]}{10^3 \left[\dfrac{kg}{m^3} \right]}; \quad \delta_L = 0.6797 [1].$$

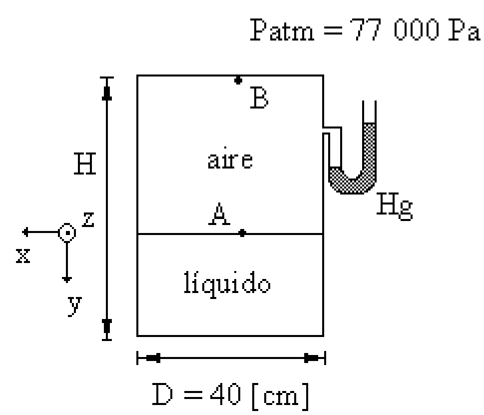
c) La ordenada al origen del modelo matemático del primer inciso representa la presión que se tiene cuando la profundidad es cero, es decir es la presión manométrica del fluido gaseoso, por lo tanto para calcular su presión absoluta tenemos que $P_{abs} = P_{man} + P_{atm}$, entonces P_{man} = (149 001.8 [Pa]) – (77 000 [Pa]) = 72 001.8 [Pa].

6. En la figura se muestra un tanque de forma cilíndrica cuya altura es H y diámetro D, dentro de él se encuentran dos fluidos: un líquido y aire. En la parte superior tiene conectado un manómetro cuyo líquido manométrico es mercurio y su extremo derecho está abierto a la atmósfera. Se realizaron mediciones de presión absoluta (P_{abs}), en función de la profundidad (y) indicada dentro del líquido que está en el tanque y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine en el SI:

a) El vector peso específico y la densidad relativa del líquido contenido en el tanque.
b) El modelo matemático lineal P = f (y), la presión absoluta en el punto A y en el punto B.
c) La altura (H) del tanque si se sabe que el volumen que ocupa el aire es 0.12 [m^3] y que la presión absoluta en el fondo del mismo es 105.304 [kPa]; emplee sus resultados experimentales.

y [m]	P_{abs} [kPa]
0	101.3
0.15	102.29
0.3	103.31
0.45	104.29

$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]
$g = 9.78\ \hat{j}$ [m/s^2]



Resolución:

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables tendrá la forma $P_{abs} = m\ y + b$; cuya pendiente es $m = \gamma$, además $m = \frac{\Delta P_{abs}}{\Delta y}$, por lo tanto con el método de la suma de los cuadrados mínimos: $m =\ = 6\ 660$ [Pa/m], $\vec{\gamma} = 6\ 660\ \hat{j}$ [N/m^3]; para calcular la densidad relativa se determinará la densidad del líquido, es decir $\delta_L = \rho_L/\rho_a$, $\gamma_L = \rho_L\, g$, entonces $\rho_L = \delta_L/g$; $\delta_L = \delta_L/g\rho_a$, por lo tanto la densidad relativa es

$$\delta_L = \frac{6660\ [\mathrm{N/m^3}]}{\left(9.78\left[\mathrm{m/s^2}\right]\left(10^3\right)[\mathrm{kg/m^3}]\right)} = 0.681\ [1]$$

b) Para determinar el modelo matemático hace falta la ordenada al origen, entonces con el método de la suma de los cuadrados mínimos: b = 101 299 [Pa], por lo que el matemático solicitado es P_{abs} [Pa]=6 660 [Pa/m] y [m] + 101 299 [Pa]; entre el punto A y B existe un fluido gaseoso, por lo que la diferencia de presiones entre sus puntos es despreciable, es decir $P_A = P_B$, por lo tanto
$P_{absA} = P_{absB} = P_{aire} = b$; $P_{absA} = P_{absB} = 101\ 299$ [Pa].

c) La altura del tanque está dada por $H = h_L + h_a$, por otra parte la presión en el fondo del recipiente es $P_f = m\ h_L + b$; de donde podemos despejar la altura del líquido $h_L = (P_f - b)\ /\ m$,

$$h_L = \frac{(105304[Pa]) - (101299\ [Pa])}{6\,660\ [Pa/m]} = 0.6014\ [\mathrm{m}]$$

sabemos que el volumen que ocupa el aire está dado por $V_a = ¼(\pi\ D^2\ h_a)$; de donde podemos despejar la altura que ocupa este fluido

$$h_a = \frac{4\,V_a}{\pi D^2} = \frac{4\left(0.12[\mathrm{m^3}]\right)}{\pi\left(0.4[\mathrm{m}]\right)^2} = 0.9549[\mathrm{m}]$$

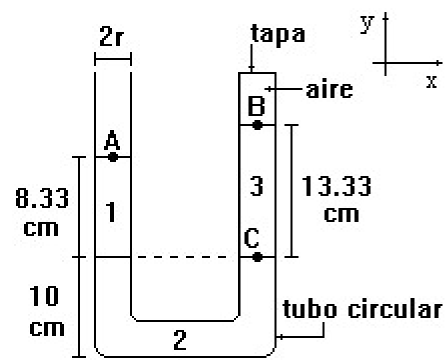
con las alturas del líquido y del aire podemos calcular la del tanque $H = (0.6014 + 0.9549)[\mathrm{m}] = 1.5563$ [m].

Gradiente de presión

Ejercicios propuestos

1. Se tiene un manómetro diferencial que está cerrado en una de sus ramas como lo muestra la figura. Con base en ello, determine:

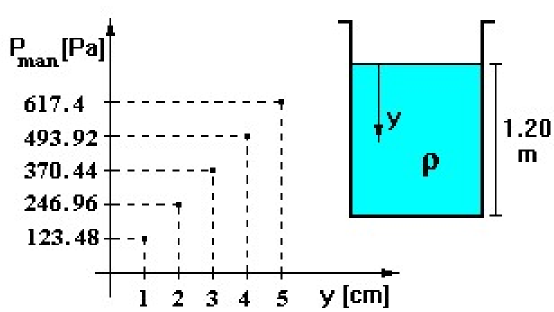
a) La presión absoluta en el punto A.
b) La presión manométrica en el punto B.
c) La presión absoluta en el punto C.
d) La fuerza neta que actúa sobre la tapa del tubo. Considere las presiones inferior y superior en la tapa.



ρ_1 = 1 000 [kg/m^3]
ρ_2 = 2 600 [kg/m^3]
ρ_3 = 300 [kg/m^3]
ρ_{Hg} = 13 589 [kg/m^3]
P_{atm} = 580 mm de Hg
g = 9.78 [m/s^2]
r = 1 [cm]

2. En cierto laboratorio de física y en un recipiente como el mostrado en la figura se realizaron mediciones de presión manométrica (con referencia a la presión atmosférica) a profundidades diversas; los resultados experimentales se muestran en la gráfica. El recipiente contenía 315 kg de glicerina y ocuparon un volumen de 250 dm^3; pruebas posteriores más amplias permiten afirmar que el modelo matemático obtenido en la gráfica tiene validez hasta el fondo del tanque. Determine:

a) El valor de la densidad de la glicerina en unidades del SI.
b) El módulo del peso específico de la glicerina en el SI.
c) El módulo de la aceleración de la gravedad en el lugar en que se realizó el experimento.
d) La presión manométrica en el fondo del recipiente.

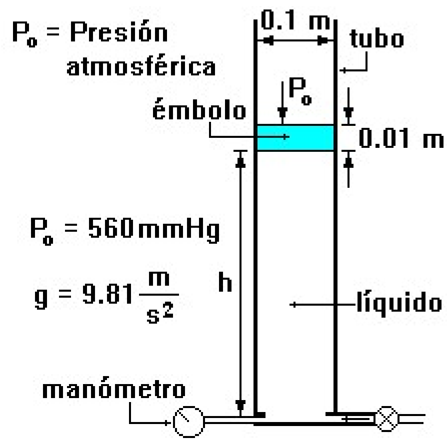


3. Para un experimento de hidrostática se construyó el dispositivo que se muestra en la figura. Consiste en un tubo de sección circular con la parte superior abierta y un émbolo de masa m que se desplaza en su interior sin fricción. Al nivel de la base del tubo está la entrada de un líquido que se inyecta a presión y eleva el émbolo hasta 5 m a partir de la base. Para las posiciones de “h” indicadas en la tabla, con el sistema en reposo, se registraron los datos de presión correspondientes. Con base en ello, determine:

a) El modelo matemático que relaciona a la presión P en función de la latura h.
b) El significado físico de la pendiente y el líquido del cual se trata.
c) La masa del émbolo.

h [m]	P_m [Pa]
0	1 249
1	9 599
2	17 949
3	26 299
4	34 649
5	42 999

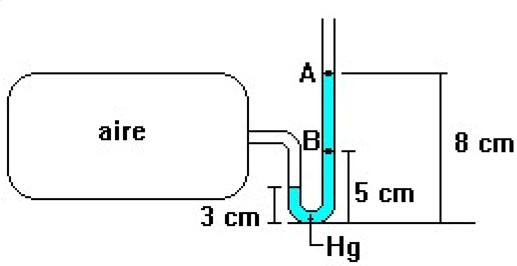
Sustancia	ρ [kg/m^3]
Agua	1 000
Aceite	850
Mercurio	13 600



4. En la figura se muestra un tanque de aire a presión, al cual se le conecta un manómetro diferencial en forma de U, éste utiliza como fluido manométrico mercurio, con base en esto determine:

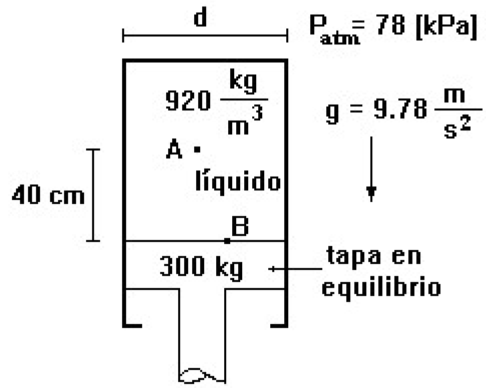
   a) La presión absoluta en el fondo del tubo en U.
   b) La presión manométrica del aire contenido en el tanque.
   c) La presión absoluta en el punto A.
   d) La presión manométrica en el punto B.

   ρ_{Hg} = 13 600 [kg/m^3]
   P_{atm} = 77 × 10^3 [Pa]
   g = 9.78 [m/s^2]



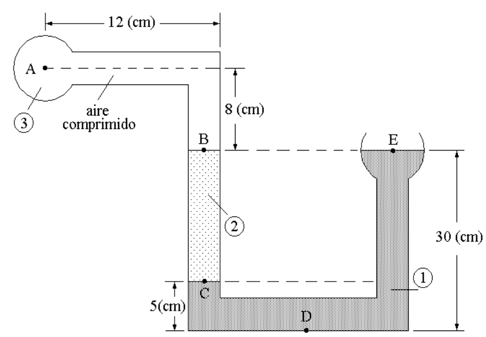
5. El cilindro que muestra la figura tiene 60 cm de diámetro (d). La tapa es de 300 kg, la densidad del líquido en el cilindro es de 920 kg/m^3, la presión atmosférica de 78 kPa y la aceleración de la gravedad de 9.78 m/s^2. Con base en ello determine:

   a) La presión absoluta en el punto B.
   b) La presión absoluta en el punto A.



6. La figura muestra dos recipientes, uno de ellos está abierto a la atmósfera. Los recipientes están conectados entre sí por medio de un tubo en el cual se encuentran tres fluidos. Si se sabe que la presión manométrica en el punto D es 3 022 [Pa], que la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 [m/s^2] y que la presión atmosférica local es 75 800 [Pa], determine:

a) La densidad del fluido 1.
b) La presión absoluta en el punto C.
c) La densidad, la magnitud del peso específico y el volumen específico del fluido 2.
d) La presión manométrica en el punto A, considerando que la densidad del aire es despreciable.
e) La lectura, en cm, que tendría un barómetro de mercurio en esta localidad.



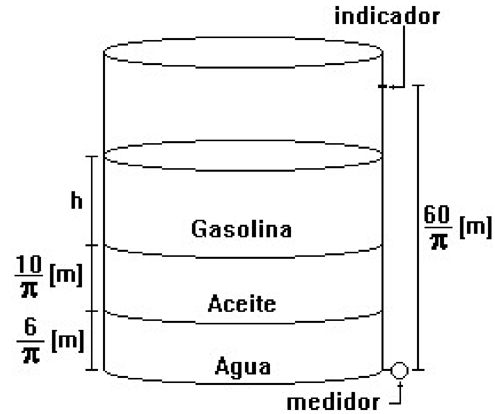
$\delta_2 = 0.68$; $\delta_{Hg} = 13.595$
$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]

7. En una refinería ocurre una emergencia y debido a ello se vierten agua, aceite y gasolina en un contenedor (abierto por la parte superior) destinado únicamente para gasolina. El medidor situado en el fondo del contenedor indica "lleno". Sabemos que el contenedor se llena con una masa de 9.72×10^{4} [kg] de gasolina, tomando en cuenta los datos que se proporcionan y la figura, determine:

a) El radio de la base.
b) La presión manométrica en el fondo del tanque.
c) La altura de gasolina que contiene en este momento el tanque (en función de π).

d) La presión absoluta en el fondo del tanque si la presión atmosférica en el lugar es de 760 [mm de Hg].

$\rho_{gasolina}$ = 720 [kg/m^3]
ρ_{aceite} = 880[kg/m^3]
ρ_{agua} = 1000 [kg/m^3]
$\rho_{mercurio}$ = 13600 [kg/m^3]
g = 9.81 [m/s^2]



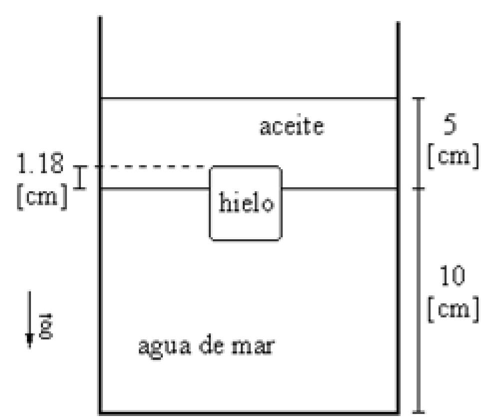
8. En el cenote de Chichén Itzá se realizaron mediciones de profundidad y presión absoluta, obteniéndose el modelo matemático siguiente:

$$P_{abs} = 10\,290 \left[\frac{N}{m^3}\right] h\,[m] + 101{,}292.8\,[Pa]$$

Si consideramos que el cenote se encuentra al nivel del mar (g = 9.81 m/s^2), calcule:
a) La densidad del agua contenida en el cenote.
b) El peso y el volumen específicos del agua contenida en el cenote.
c) La presión atmosférica del lugar citado.
d) La presión manométrica para una profundidad de 10 [m].
e) La altura h que registraría un barómetro de Torricelli si se sabe que la densidad del mercurio es ρ_{Hg} = 13,600 [kg/m^3].

9. En un recipiente abierto a la atmósfera, un cubo de hielo de 3 [cm] de lado, flota en la frontera entre aceite y agua de mar con su superficie superior 1.18 [cm] por encima de la frontera como se muestra en la figura correspondiente. Con base en la información antes mencionada y tomando en cuenta que en dicho experimento las temperaturas de las sustancias son iguales y que se realizó en un laboratorio del D. F., determine, en el SI:

a) La presión manométrica en la superficie superior del cubo de hielo.
b) La densidad relativa y el peso específico del agua de mar.
c) El peso del cubo de hielo.
d) La presión absoluta en el fondo del tanque.
e) El volumen específico del aceite.



ρ_{hielo} = 920 [kg/m^3]
ρ_{aceite} = 750 [kg/m^3]

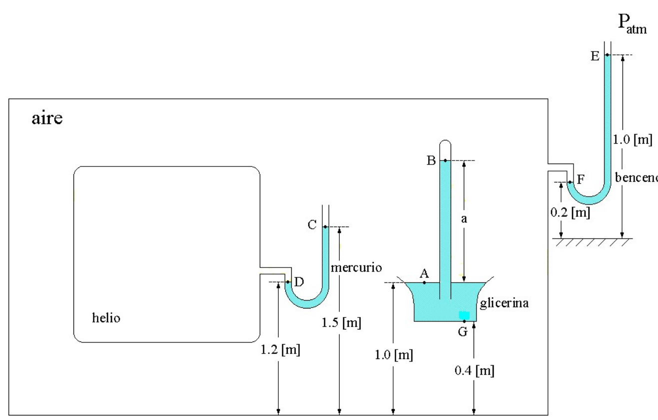
P_{atm} = 77 [kPa]
g = 9.78 [m/s^2]

$\rho_{\text{agua de mar}} = 1030$ [kg/m^3]
$\rho_{\text{agua}} = 1000$ [kg/m^3]

10. En el interior de una cámara presurizada para investigación, situada muy por encima del nivel del mar, se tiene aire a una presión absoluta de 77 000 [Pa], en el interior se tiene un barómetro de glicerina y un tanque de helio (He) comprimido. La cámara tiene conectada en la parte derecha un manómetro en U, como se muestra en la figura, cuyo líquido manométrico es benceno. Con base en la figura y en la información proporcionada, determine, en el SI:

a) La altura *a* si el barómetro emplea glicerina.
b) La presión absoluta a la que está el helio.
c) La presión atmosférica del lugar, es decir la presión en el punto E.
d) El peso específico del benceno, así como su expresión dimensional.
e) La presión relativa, con respecto a la presión del aire de la cámara, del punto G.

$\rho_{\text{glicerina}} = 1\ 260$ [kg/m^3]
$\rho_{\text{agua}} = 10^3$ [kg/m^3]
$\rho_{\text{mercurio}} = 13\ 600$ [kg/m^3]
$\delta_{\text{benceno}} = 0.9$
$g = 9.76$ [m/s^2]

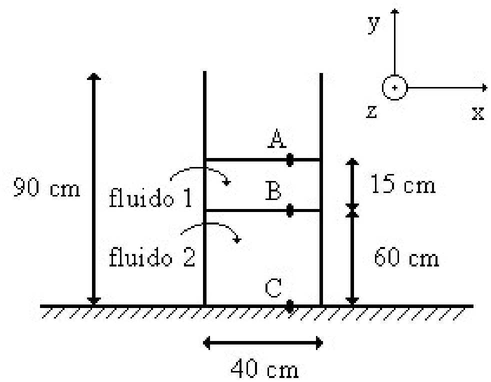


11. En un recipiente cilíndrico de 20 [cm] de diámetro y 1.20 [m] de altura se vierten agua líquida, cuya densidad es 990 [kg/m^3] y aceite comestible, cuya densidad es 870 [kg/m^3]. Si la masa de las dos sustancias suma 34.7 [kg] y el recipiente queda completamente lleno, determine:

a) La masa de cada sustancia.
b) El módulo del vector peso específico del aceite si $g = 9.78$ [m/s^2].
c) Las alturas de agua y del aceite en el recipiente, en [cm].
d) La presión manométrica, en [kPa] en la interfase entre los dos líquidos.
e) La profundidad, medida a partir de la boca de recipiente donde la presión absoluta es 84 [kPa] si la presión atmosférica del lugar es 77 050 [Pa].

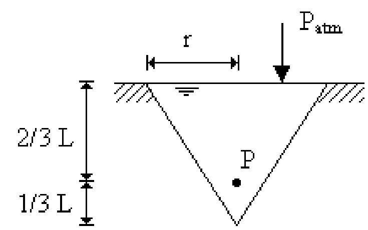
12. En un tanque de base cuadrada de 40 [cm] de lado y altura de 90 [cm] se tienen dos líquidos inmiscibles, es decir, que no se mezclan. Un barómetro en ese lugar indica 650 [mm] de Hg, la aceleración gravitatoria del lugar es 9.8 [m/s^2]. Con base en ello y en la figura, determine, en el SI:

a) La presión manométrica en el punto B.
b) La densidad del fluido 2 si la presión manométrica en el punto C es 5.842 [kPa]
c) La masa de cada uno de los líquidos.
d) El vector peso específico del fluido 1 y su volumen específico.
e) La presión absoluta en el punto A.



$\delta_{fluido\ 1} = 0.65$
$\delta_{Hg} = 13.595$
$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]

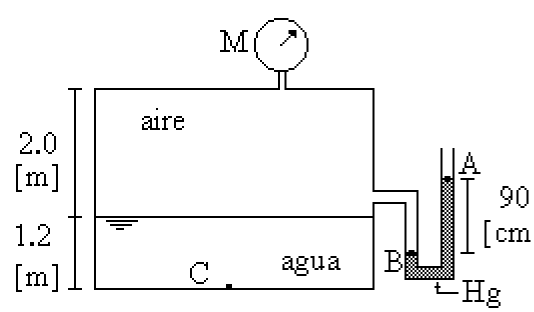
13. Un recipiente en forma de cono invertido con altura L = 21 [cm] y radio r = 10 [cm], abierto en la parte superior a la atmósfera, está completamente lleno de agua. Si la densidad de este líquido es 10^3 [kg/m^3], la presión atmosférica local es P_{atm} = 77 000 [Pa] y la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 [m/s^2], determine:



a) La presión manométrica a 2/3 de L de profundidad; es decir, en el punto P.
b) La masa de agua que se requirió para llenar el cono.

14. En la figura se muestra un tanque que contiene agua y aire. El manómetro diferencial, en forma de U, contiene mercurio. Determine, en el SI:

a) La presión absoluta y la presión manométrica en el punto A.
b) La lectura indicada por el manómetro M.
c) La presión absoluta en el fondo del tanque, es decir en el punto C.

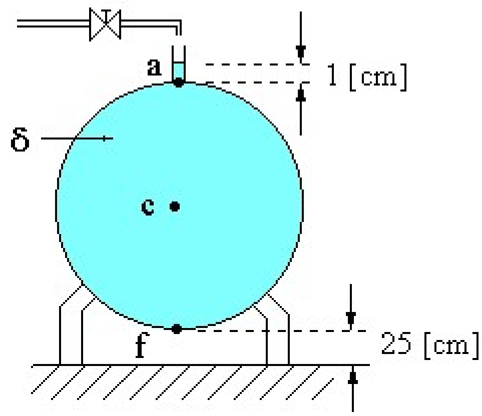


ρ_{Hg} = 13 595 [kg/m^3]; ρ_{agua} = 990 [kg/m^3]
P_{atm} = 0.78 [bar]; $g = 9.78$ [m·s^{-2}]
$\rho_{aire} \approx 0$ [kg/m^3] 1 [bar] = 10^5 [Pa]

15. Se tiene un tanque esférico de 1.2 [m] de diámetro, en su parte superior tiene un tubo pequeño vertical, de sección transversal despreciable el cual permite que el tanque se llene. Si este último está completamente lleno de un líquido cuya densidad relativa es 1.26, como se muestra en la figura, la aceleración gravitatoria del lugar es 9.8 [m/s^2] y la presión atmosférica del lugar es 61 [cm de Hg], determine en el SI:

a) La presión manométrica en el fondo del tanque, es decir en el punto f, si la presión manométrica en el centro de la esfera (punto c) es 7 532 [Pa].
b) La masa del líquido contenido únicamente en el tanque, desprecie la que está en el tubo vertical.
c) La presión absoluta en la parte superior del tanque, es decir en el punto a.

$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]
$\delta_{Hg} = 13.6$



Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) $P_A = 77\ 082.24$ [Pa]
   b) $P_B = 423.57$ [Pa]
   c) $P_C = 77\ 896.914$ [Pa]
   d) $\vec{F} = 0.1331\ \hat{j}$ [N]

2. a) $\rho = 1260$ [kg/m^3]
   b) $\gamma = 12\ 348$ [N/m^3]
   c) $g = 9.8$ [m/s^2]
   d) $P_{man} = 14\ 817.6$ [Pa]

3. a) P_m [Pa] = 8 350 [Pa/m] h [m] + 1 249 [Pa]
   b) $m = \gamma_{aceite}$; aceite.
   c) m = 1 [kg]

4. a) $P_{abs} = 87.64$ [kPa]
   b) $P_{man} = 6\ 650.4$ [Pa]
   c) $P_A = 77$ [kPa]
   d) $P_B = 3.99$ [kPa]

5. a) $P_B = 67.623$ [kPa]
   b) $P_A = 64.024$ [kPa]

6. a) $\rho_1 = 1029.9932$ [kg/m^3]
   b) $P_{absC} = 78\ 318.3333$ [Pa]
   c) $\rho_2 = 680$ [kg/m^3]; $\gamma_2 = 6\ 650.4$ [N/m^3], $v_2 = 0.0015$ [m^3/kg]
   d) $P_{manA} = 855.7333$ [Pa]
   e) $L_{Hg} = 57.01$ [cm]

7. a) r = 1.5 [m]
   b) $P_f = 134.897$ [kPa]
   c) $h = 39.44/\pi$ [m]
   d) $P_{abs} = 236.293$ [kPa]

8. a) $\rho = 1\ 048.93$ [kg/m^3]
   b) $\gamma = 10\ 290$ [N/m^3]; $v = 0.000953$ [m^3/kg]
   c) $P_{atm} = 101.292$ [kPa]
   d) $P_{man} = 102.9$ [kPa]
   e) h = 75.92 [cm]

9. a) $P_B = 280.197$ [Pa]
b) $\delta = 1.03$; $\gamma = 10\ 073.4$ [N/m^3]
c) $W = 0.2429$ [N]
d) $P_E = 78\ 374.09$ [Pa]
e) $v = 0.00133$ [m^3/kg]

10. a) $a = 6.2614$ [m]
b) $P_D = 116\ 820.8$ [Pa]
c) $P_E = 69\ 972.8$ [Pa]
d) $\gamma_b = 8\ 784$ [N/m^3]; $\dim(\gamma_b) = L^{-2}\ M\ T^{-2}$
e) $P_G = 7\ 378.56$ [Pa]

11. a) $m_{aceite} = 19.053$ [kg]; $m_{agua} = 15.647$ [kg]
b) $\gamma_{aceite} = 8\ 508.6$ [N/m^3]
c) $L_{agua} = 50.29$ [cm]; $L_{aceite} = 69.71$ [cm]
d) $P_{man} = 5\ 931.3451$ [Pa]
e) $L = 0.8023$ [m]

12. a) $P_{manB} = 955.5$ [Pa]
b) $\rho_2 = 831.0374$ [kg/m^3]
c) $m_1 = 15.6$ [kg]; $m_2 = 79.7796$ [kg]
d) $\vec{\gamma}_1 = -6370\ \hat{j}$ [N/m^3]
e) $P_{absA} = 86\ 600.15$ [Pa]

13. a) $P_{man} = 1369.2$ [Pa]
b) $m = 2.1991$ [kg]

14. a) $P_{absA} = 78\ 000$ [Pa], $P_{manA} = 0$ [Pa]
b) $P_M = 119\ 663.19$ [Pa]
c) $P_{absC} = 209\ 281.83$ [Pa]

15. a) $P_{manf} = 14\ 940.8$ [Pa]
b) $m = 1\ 140.0211$ [kg]
c) $P_{äbsa} = 81\ 424.28$ [Pa]

Capacidades térmicas específicas

Ejercicios resueltos

1. En la gráfica se muestra la gráfica de la temperatura (T) alcanzada en función del calor suministrado (Q) a una sustancia cuya capacidad térmica específica es 138 [J/(kg·ΔK)] en su fase líquida. Sabiendo que las temperaturas de fusión y de ebullición corresponden a cambios de fase, determine para la sustancia:

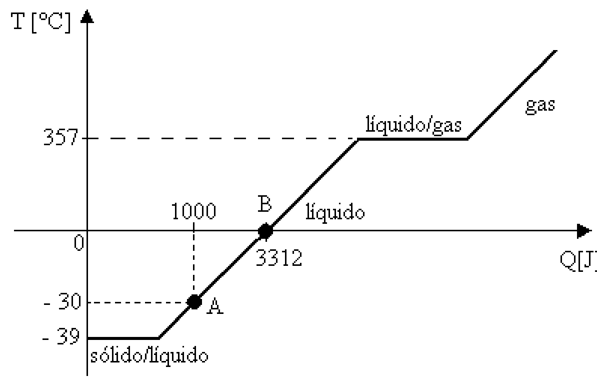
a) Su masa.

b) Su capacidad térmica.

c) Sus temperaturas de fusión y de ebullición.

d) La cantidad de calor necesaria para que la temperatura de la sustancia cambie desde su temperatura de fusión hasta la de ebullición.

e) La temperatura de equilibrio que alcanzaría al mezclarse con 120 [g] de agua a 20 [°C] si la sustancia estuviese a 0 [°C]. Considere c_{agua} = 4 186 [J/(kg·Δ°C)] y que la mezcla se realiza en un sistema aislado.



Resolución:

a) La cantidad de energía en forma de calor que es necesario proporcionar a una masa para que cambie su temperatura está dada por

$Q = mc\Delta T$; de donde $m = \dfrac{Q}{c(T_f - T_i)}$, apoyándonos en los puntos A y B de la gráfica tenemos

$$m = \frac{(3312 - 1000)\ J}{(138 \frac{J}{kg \cdot \Delta K})[0 - (-30)]\Delta°C} = 0.5585\ [kg].$$

b) La capacidad térmica de la sustancia está dada por

$C = mc$; por lo tanto $C = (0.5585\ kg)(138\ \dfrac{J}{kg \cdot \Delta°C})$; $C = 77.073\ \left[\dfrac{J}{\Delta°C}\right]$.

c) La temperatura de fusión es aquella en la que la sustancia coexiste en fase sólida y gaseosa, por lo tanto, de acuerdo con la gráfica: $T_{fusión} = -39$ [°C] ; la temperatura de ebullición es aquella en la que coexiste en su fase líquida y gaseosa, por lo tanto consultando la gráfica podemos concluir que $T_{ebullición} = 357$ [°C].

d) La cantidad de calor necesaria está dada por Q = mc ($T_{eb} - T_{fus}$), por lo tanto, de acuerdo con la gráfica tenemos que

$$Q = (0.5585\text{ kg})(138\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta°\text{C}})[357-(-39)]°\Delta\text{C} = 30\,520.9\ [\text{J}].$$

e) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos que:
$Q_{agua} + Q_{sustancia} = 0$; lo que podemos abreviar como $Q_a + Q_s = 0$,
sabiendo que $Q = mc\Delta T = mc(T_f - T_i)$, podemos escribir
$m_a\ c_a\ (T_f - T_{ia}) + m_s\ c_s\ (T_f - T_{is}) = 0$, despejando la temperatura final (T_f) o de equilibrio, tenemos

$$T_f = \frac{m_a c_a T_{ia} + m_s c_s T_{is}}{m_a c_a + m_s c_s}\text{; por lo tanto}$$

$$T_f = \frac{(0.12\,\text{kg})(4186\frac{\text{J}}{\text{kg}\ \ \Delta°\text{C}})(20\,°\text{C}) + (0.5585\,\text{kg})(138\frac{\text{J}}{\text{kg}\ \ \Delta°\text{C}})(0\,°\text{C})}{(0.12\,\text{kg})(4186\frac{\text{J}}{\text{kg}\ \ \Delta°\text{C}}) + (0.5585\,\text{kg})(138\frac{\text{J}}{\text{kg}\ \ \Delta°\text{C}})} = 17.3395\ [°\text{C}].$$

2. En el laboratorio de Física Experimental se calentó agua y se obtuvo la gráfica de su temperatura (T) en función del calor (Q) suministrado. Sabiendo que la capacidad térmica específica del agua, (en su fase líquida) es 4 186 [J/(kg·ΔK)], determine:

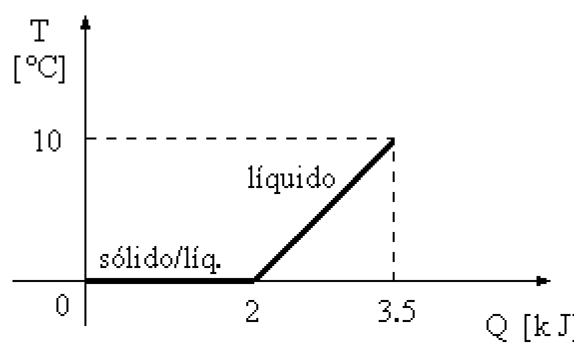
a) El modelo matemático que relaciona a la temperatura del agua líquida en función del calor suministrado, es decir T = f (Q).

b) La masa de agua empleada en el experimento. Exprese el resultado en gramos.

c) La temperatura de equilibrio si cuando el agua llegó a 10 [°C] se mezcló con 100 [g] de virutas de hierro que estaban a 23 [°C] en un calorímetro de capacidad térmica despreciable.

Considere
para el hierro:
c_{hierro} = 470 [J/(kg·Δ°C)]

para el agua:
c_{agua} = 4 186 [J/(kg·ΔK)]
$T_{fusión}$ = 0 [°C]
$T_{ebullición}$ = 92.5 [°C]



Resolución:

a) El modelo matemático tendrá la forma T = *m* Q + b, cuya pendiente es $m = \frac{\Delta T}{\Delta Q}$,
entonces calculando la pendiente con los dos puntos de la gráfica tenemos que

$$m = \frac{(10-0)°\text{C}}{(3.5-2)10^3\ \text{J}} = \frac{10\,°\text{C}}{1500\ \text{J}} = 6.6667\times 10^3 \left[\frac{°\text{C}}{\text{J}}\right],$$

del modelo matemático podemos despejar la ordenada al origen b = T − *m* Q, sustituimos el valor de la pendiente y uno de los puntos que proporciona la gráfica en esta última expresión, es decir,

$$b = \left(0\left[°C\right]\right) - \left(6.6667 \times 10^{3}\left[\frac{°C}{J}\right]\right) \cdot \left(2000\left[J\right]\right) = -\,13.3333\ [°C],$$

entonces el modelo matemático solicitado es

$$T\ \left[°C\right] = 0.0066667\left[\frac{°C}{J}\right] Q\left[J\right] - 13.3333[°C].$$

b) Sabemos que la cantidad de calor proporcionada para que una masa modifique su temperatura está dada por $Q = mc(T - T_i)$, esto se puede escribir como

$Q = m\ c\ T - m\ c\ T_i$, de donde

$m\ c\ T = Q + m\ c\ T_i$, si de este modelo despejamos T, tenemos

$T = \dfrac{1}{m\,c} Q + T_i$; comparando esta última expresión con el modelo matemático obtenido en el primer inciso, tenemos que la pendiente es $m = \dfrac{1}{m\,c}$; entonces

$$m = \frac{1}{\left(0.006667\left[\frac{°C}{J}\right]\right)\left(4186\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta °C}\right]\right)} = 0.035832\left[kg\right].$$

c) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos

$Q_{agua} + Q_{hierro} = 0$, lo que se puede abreviar como $Q_a + Q_h = 0$,

por otra parte $Q = m\ c\ (T_f - T_i)$ y $T_f = T_{final} = T_{equilibrio} = T_{eq}$, entonces

$m_a c_a(T_{eq} - T_{ia}) + m_h c_h(T_{eq} - T_{ih}) = 0$, despejando la temperatura de equilibrio se tiene

$T_{eq} = \dfrac{m_a c_a T_{ia} + m_h c_h T_{ih}}{m_a c_a + m_h c_h}$, es decir

$$T_{eq} = \frac{\left(0.0358\left[kg\right]\right)\cdot\left(4186\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta °C}\right]\right)\cdot\left(10\left[°C\right]\right) + \left(0.1\left[kg\right]\right)\cdot\left(470\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta °C}\right]\right)\cdot\left(23\,°C\right)}{\left(0.0358\left[kg\right]\right)\cdot\left(4186\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta °C}\right]\right) + \left(0.1\left[kg\right]\right)\cdot\left(470\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta °C}\right]\right)}$$

$T_{eq} = 13.1\ [°C]$.

3. Con el objeto de determinar de qué material está construido un calorímetro, cuya masa es de 300 [g], se vierten 504.9 [g] de agua en él, de tal manera que la temperatura del agua en el interior del recipiente es 15 [°C]. A continuación se pone en contacto con el agua una muestra de 560 [g], a 100 [°C], del mismo material con el que está construido el calorímetro. Se observa que la temperatura final del sistema es 22.5 [°C]. Considerando que el calorímetro es adiabático y que su temperatura inicial es la del agua, determine:

a) El material del calorímetro.
b) La capacidad térmica del calorímetro.

sustancia	c [cal/(g·Δ°C)]
aluminio	0.220
plomo	0.031
cobre	0.093
hierro	0.110
agua	1.0

Resolución:

a) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos $Q_{agua} + Q_{calorímetro} + Q_{muestra} = 0$, lo cual se puede escribir como $Q_a + Q_c + Q_m = 0$, dado que $Q = m\, c\, (T_f - T_i)$, entonces $m_a c_a (T_f - T_{ia}) + m_c c_c (T_f - T_{ic}) + m_m c_m (T_f - T_{im}) = 0$, como el calorímetro está construido con el mismo material de la muestra, es decir, como $c_c = c_m$, podemos escribir

$$m_a c_a (T_f - T_{ia}) + [m_c (T_f - T_{ic}) + m_m (T_f - T_{im})] \cdot c_m = 0,$$

de donde la capacidad térmica específica de la muestra está dada por

$$c_m = \frac{-m_a c_a (T_f - T_{ia})}{m_c (T_f - T_{ic}) + m_m (T_f - T_{im})}, \text{ entonces}$$

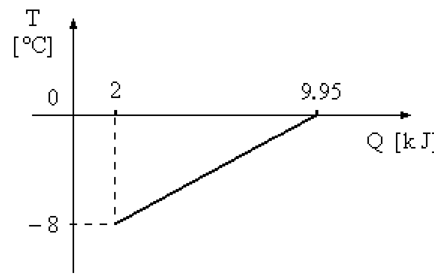
$$c_m = \frac{-(0.5049[\text{kg}]) \cdot \left(1\left[\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \Delta°\text{C}}\right]\right) \cdot (22.5 - 15)[\Delta°\text{C}]}{(0.3[\text{kg}]) \cdot (22.5 - 15)[\Delta°\text{C}] + (0.56[\text{kg}]) \cdot (22.5 - 10)[\Delta°\text{C}]} = 0.092\left[\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \Delta°\text{C}}\right];$$

consultado la tabla podemos concluir que el material del que está hecho el calorímetro es cobre.

b) La capacidad térmica o capacidad calorífica del calorímetro está dada por $C_{calorímetro} = C_c = c_c\, m_c$, esto es

$$C_c = \left(0.092\left[\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \Delta°\text{C}}\right]\right) \cdot (300[\text{g}]) = 27.6069\left[\frac{\text{cal}}{\Delta°\text{C}}\right] \cdot \left(\frac{4.186[\text{J}]}{1\,[\text{cal}]}\right) = 115.5626\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right].$$

4. En la gráfica se presenta la temperatura (T) de una muestra en función del calor (Q) que se le suministró. Si la sustancia tenía una masa de 440 [g], determine:



a) El modelo matemático lineal de la gráfica.
b) La capacidad térmica específica de la muestra.

Resolución:

a) De acuerdo con la gráfica, el modelo matemático tendrá la forma T = *m* Q + b, cuya pendiente está dada por $\frac{\Delta T}{\Delta Q}$, entonces basándonos en los dos puntos que presenta la gráfica tenemos que

$m = \frac{(0-(-8))\,[°C]}{(9.95-2)10^3\,[J]} = \frac{8\,[°C]}{7950\,[J]} = 0.001006\left[\frac{°C}{J}\right]$, para calcular la ordenada al origen nos apoyaremos en uno de los puntos que nos proporciona la gráfica, es decir

$b = T_2 - m\,Q_2$, $b = (0[°C]) - \left(0.001006\left[\frac{°C}{J}\right]\right)(9950[J]) = -10.0126\ [°C]$,

por lo tanto el modelo matemático solicitado es

$T\,[°C] = 0.001006\left[\frac{°C}{J}\right]Q[J] - 10.0126\ [°C]$.

b) Sabemos que la cantidad de calor, proporcionada a una masa, que modifica su temperatura, está dada por $Q = m\,c\,(T - T_i)$, lo cual se puede escribir como $Q = m\,c\,T - m\,c\,T_i$,

si de esta última expresión despejamos la variable T, tenemos $T = \frac{1}{mc}Q + T_i$;

comparando este modelo con el obtenido en el primer inciso podemos concluir que la pendiente de la gráfica significa $m = \frac{1}{m\,c}$, entonces de esta última expresión podemos despejar la capacidad térmica específica de la muestra, es decir

$c = 1 / (m\ \mathrm{m})$; $c = \frac{1}{\left(0.001006\left[\frac{°C}{J}\right]\right)\cdot(0.44[kg])} = 2259.1722\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta°C}\right]$.

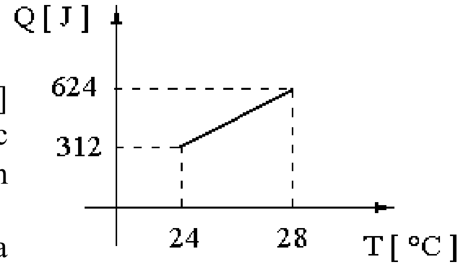
5. En un laboratorio se colocó una muestra de plomo de 600 [g] en un calorímetro. Se midió la energía en forma de calor (Q) que se le proporcionó al plomo y la temperatura (T) que alcanzó, obteniéndose la gráfica mostrada. Determine:

a) La capacidad térmica específica y la capacidad térmica del plomo utilizado.

b) La temperatura inicial que tenía la muestra.

c) La temperatura de equilibrio, si al llegar a 28 [°C] se mezcló el plomo con 100 [g] de agua líquida (c = 4 186 [J/(kg·ΔK)]) que estaba a 10 [°C], sin pérdidas de energía.

d) La cantidad de calor necesaria para que la mezcla del inciso anterior (agua y plomo, ambos a 28 [°C]) aumenten 5 [K], sin disipación de energía.



Resolución:

a) El modelo matemático de la gráfica tiene la forma Q = *m* T + b;
sabemos que el calor necesario para que una masa modifique su temperatura está dado por Q = m c (T – T_i) = m c T – m c T_i, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático de la gráfica podemos observar que la pendiente de la ecuación de dicha gráfica es *m* = m c, de donde la capacidad térmica específica es el cociente c = *m* / m, por lo tanto, obteniendo la pendiente podemos determinar la capacidad térmica específica del plomo; entonces

$$m = \frac{(6.24 - 312)\text{J}}{(28 - 24)°\text{C}} = \frac{312\ [\text{J}]}{4[\Delta°\text{C}]} = 78\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right]\text{. entonces c} = \frac{78\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right]}{0.6\ \text{kg}} = 130\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta°\text{C}}\right];$$

la capacidad térmica es el producto C = m c, por lo tanto es la pendiente de la gráfica, entonces

$$C = m; \quad C = 78\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right].$$

b) Para determinar la temperatura inicial de la muestra es necesario obtener la ecuación del modelo matemático de la gráfica, como ya tenemos el valor de la pendiente podemos apoyarnos en uno de los puntos que proporciona dicha gráfica, es decir

$$b = Q - m\,T\text{, entonces } b = (624\ [\text{J}]\ ) - \left(78\left[\frac{\text{J}}{°\text{C}}\right]\right)(28\ [°\text{C}]\ ) = -1\ 560\ [\text{J}]\ ,$$

sabemos que Q = m c (T – T_i) = m c T – m c T_i, entonces si comparamos esta última

expresión con la forma del modelo matemático de la gráfica, es decir con

Q = *m* T + b,

podemos concluir que la ordenada al origen significa b = – m c T_i

de donde podemos despejar la temperatura inicial T_i = b / (– *m* c), por lo tanto

$$T_i = \frac{-1560\,[\mathrm{J}]}{-(0.6\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(130\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right)} = 20\,[°\mathrm{C}].$$

c) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados, tenemos

$Q_{plomo} + Q_{agua} = 0$, que se puede abreviar como $Q_p + Q_a = 0$,

como $Q = m\,c\,(T_f - T_i)$, podemos escribir $m_p c_p (T_{eq} - T_{ip}) + m_a c_a (T_{eq} - T_{ia}) = 0$,

de donde podemos despejar la temperatura de equilibrio:

$$T_{eq} = \frac{m_a c_a T_{ia} + m_p c_p T_{ip}}{m_a c_a + m_p c_p}$$, entonces

$T_{eq} =$

$$= \frac{(0.1\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(4\,186\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right)\cdot(10\,[°\mathrm{C}]) + (0.6\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(130\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right)\cdot(28\,°\mathrm{C})}{(0.1\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(4\,186\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right) + (0.6\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(130\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right)}$$

$T_{eq} = 12.83\,[°\mathrm{C}]$.

d) La cantidad total de calor necesaria será la suma de la cantidad que recibirá el agua más la que recibirá el plomo, es decir

$Q_n = Q_p + Q_a = (m_a c_a + m_p c_p)\Delta T$, por lo tanto

$$Q_n = \left[(0.1\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(4\,186\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right) + (0.6\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(130\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right)\right]\cdot(15\,\Delta\mathrm{K}),$$

$Q_n = 2\,483\,[\mathrm{J}]$.

6. Un resistor eléctrico disipa una potencia de 0.4 [kW] y aumenta la temperatura de 1.2 [ℓ] de agua líquida de 0 [°C] a 54 [°C] en el lapso de 15 minutos. Si la capacidad térmica específica del agua en su fase líquida es $c = 1$ [cal/(g·Δ°C)] y su densidad es $\rho = 10^3$[kg/m^3] determine, en el SI:

a) El calor que recibe el agua para aumentar su temperatura de 0 [°C] a 54 [°C].

b) La eficiencia del resistor si se sabe que ésta es el cociente del calor transmitido al agua entre la energía disipada total por el resistor.

Resolución:

a) La cantidad de calor que recibe el agua está dada por $Q_a = m\,c_{agua}\,\Delta T = m\,c_a\,\Delta T$, pasaremos la capacidad térmica específica del agua al SI:

$$c_a = = 1\left[\frac{cal}{g\cdot\Delta°C}\right]\cdot\left(\frac{4.186\,[J]}{1\,[cal]}\right)\cdot\left(\frac{1\,000\,[g]}{1\,[kg]}\right)\cdot\left(\frac{1\,\Delta°C}{1\,\Delta K}\right) = 4\,186\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta K}\right],$$

para calcular la masa de agua nos podemos apoyar en su volumen y en la densidad, esto es

$\rho = \dfrac{m}{V}$ de donde $m = \rho V = \left(10^3\left[\dfrac{kg}{m_3}\right]\right)\cdot\left(0.0012\,[m^3]\right) = 1.2\,[kg]$, entonces

$$Q_a = (1.2\,[kg])\cdot\left(4.186\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta K}\right]\right)\cdot(\,54 - 0\,)\,\Delta°C = 271\,252.8\,[J].$$

b) De acuerdo con la información proporcionada en el ejercicio, la eficiencia está dada por

$\eta = \dfrac{Q_a}{Q_{disip}}$, el numerador se obtuvo en el inciso anterior, para calcular el denominador nos apoyaremos en el cálculo de la potencia disipada, ya que $Q_{disip} = P_{disip}\,\Delta t$, entonces

$P_{disip} = 0.4[kW] = 400[W]$, por lo tanto

$$Q_{disip} = P_{disip}\,\Delta t = (400\,[W])\cdot(15\,[min])\cdot\left(\frac{60\,[s]}{1\,[min]}\right),$$

Q_{disip} = 360 000 [J], entonces la eficiencia es $\eta = \dfrac{Q_a}{Q_{disip}} = \dfrac{271\,252.8\,[J]}{360000\,[J]} = 0.7535\,[1]$,

o expresada en términos porcentuales η = 75.35 [%].

7. En un calorímetro, cuya capacidad térmica es despreciable, se mezclaron las tres sustancias que se muestran en la tabla. Si la temperatura de equilibrio fue 291.15 [K] = 18 [°C], determine en el SI la capacidad térmica específica del cloruro de sodio.

sustancia	capacidad térmica específica [J/(kg·ΔK)]	temperatura inicial [°C]	masa [g]	temperatura de fusión [°C]	temperatura de ebullición [°C]
alcohol	1 908.82	0	250	– 117.3	78.5
agua	4 186	30	150	0	100
cloruro de sodio	c_c	22	300	801	1 450

Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos que $Q_{alcohol} + Q_{agua} + Q_{cloruro\ de\ sodio} = 0$, expresión que se puede abreviar como

$Q_A + Q_B + Q_C = 0$, dado que $Q = m\,c\,(T_f - T_i)$, podemos escribir

$m_A c_A (T_f - T_{iA}) + m_B c_B (T_f - T_{iB}) + m_C c_C (T_f - T_{iC}) = 0$ de donde podemos despejar

$$c_C = \frac{-m_A c_A (T_f - T_{iA}) - m_B c_B (T_f - T_{iB})}{m_C (T_f - T_{iC})}$$, entonces

$$c_C = \frac{-(0.25\ [\mathrm{kg}])\left(1\ 908.82\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta\mathrm{K}}\right]\right)(18-0)[^\circ\mathrm{C}] - (0.15\ [\mathrm{kg}])\left(4\ 186\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta\mathrm{K}}\right]\right)(18-30)[^\circ\mathrm{C}]}{(0.3\ [\mathrm{kg}])(18-22)[^\circ\mathrm{C}]}$$

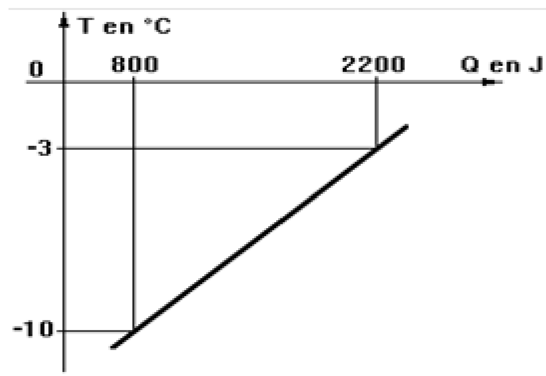
$$c_C = 879.075\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta\mathrm{K}}\right].$$

Capacidades térmicas específicas

Ejercicios propuestos

1. En la figura se muestra la gráfica que relaciona la temperatura alcanzada por un trozo de hielo, en función del calor suministrado. Considerando que la gráfica es una recta y que la capacidad térmica específica del hielo es c = 2260 [J/(kg·ΔK)], determine:

   a) La masa del trozo de hielo.
   b) La temperatura inicial del trozo de hielo.
   c) La cantidad total de calor que se requiere suministrar al trozo de hielo para que se empiece a fundir.



2. Para poder determinar la temperatura que se tiene dentro de una congeladora industrial, se tomaron cuatro trozos de hielo con diferentes masas, y se midió indirectamente la energía en forma de calor proporcionada, hasta que empezara a derretirse cada trozo. Los valores obtenidos se muestran en la tabla. Sabiendo que la capacidad térmica específica del hielo es c = 2260 J/(kg·K), determine:

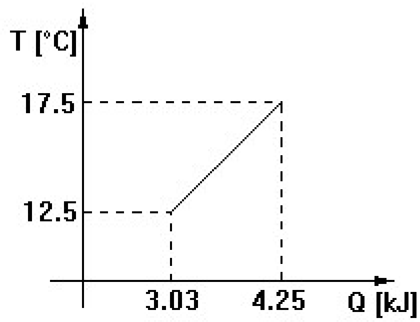
   a) El modelo matemático que mejor se ajuste a estos datos, considerando la masa como abscisa y la energía como ordenada.
   b) El significado físico de la pendiente obtenida.
   c) La temperatura dentro de dicha congeladora, despreciando la ordenada al origen del modelo matemático.

trozo	masa en kg	energía en J
1	0.250	21 800
2	0.390	33 700
3	0.570	49 000
4	1.030	88 500

3. La gráfica muestra el experimento realizado para obtener la relación entre incrementos de temperatura y calor suministrados a 100 g de alcohol. Con base en ello y en la gráfica, determine:

a) La capacidad térmica específica del alcohol.
b) La temperatura al iniciarse el experimento.

c) Si se mezcla todo el alcohol estando a 17.5°C con 100 g de agua a 60°C, ¿cuál sería la temperatura de equilibrio de la mezcla?



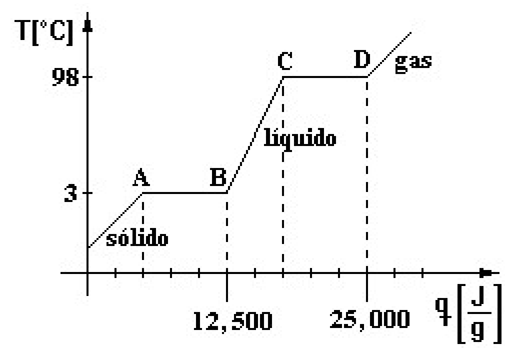
4. En un calorímetro se ponen en contacto 200 [g] de agua a 75 [°C], con algunos balines de cobre a 20 [°C]. Los balines tienen un diámetro de 1 [cm]. Con base en ello, determine:

a) El número de balines de cobre que se usaron si la temperatura de equilibrio es de 60°C. (Suponga que el calorímetro no intercambia calor con los otros componentes).
b) La energía proporcionada al agua si la temperatura inicial fue de 14°C.
c) Si la energía suministrada al agua fue proporcionada por una fuente de voltaje en la cual la diferencia de potencial V = 10 [V] y la corriente eléctrica I = 5 [A], ¿cuál fue el tiempo de funcionamiento de dicha fuente?

Considere: ρ_{Cu} = 8 900 [kg/m^3] ;c_{agua} = 4 186 [J/(kg ΔK)]; c_{Cu} = 380 [J/(kg ΔK)]

5. La gráfica muestra la curva de calentamiento de una sustancia, con base en ello, determine:

a) La capacidad térmica específica de la sustancia (líquido).
b) El calor necesario para hacer que 50 [g] de la sustancia pasen del punto C al D.
c) ¿Cuánto calor necesita un gramo de la sustancia para pasar de A a D?



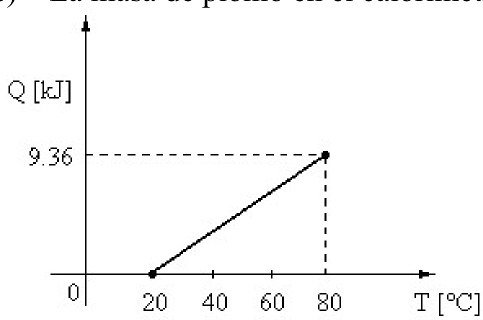
6. Se desea calentar cierta cantidad de agua mediante una parrilla eléctrica. El agua está a temperatura ambiente (293 K) y se requiere a 366 K. La parrilla se alimenta a 127 V y demanda 0.5 A de corriente eléctrica. Con base en ello y considerando que c_{agua} = 4 186 [J/(kg·Δ°C)] y c_{cobre} = 390 [J/(kg·Δ°C)], determine:

a) La cantidad de agua calentada si la parrilla eléctrica funciona durante 5 minutos.

b) La temperatura alcanzada a los 3 minutos.
c) El agua a 366 [K] se mezcla con balines hechos de cobre a 292 [K] y se alcanza una temperatura de 364 [K], ¿cuánto cobre adicional se necesitaría para que la mezcla disminuyese su temperatura hasta un valor de 323 [K]?
d) Si se desea lograr un incremento de 20 [K] en la temperatura del sistema anterior, ¿cuántos minutos se debe calentar la mezcla?

7. En experimentos realizados con una muestra de 400 gramos de cobre se obtuvo el modelo gráfico mostrado. En un calorímetro de cobre, con masa de 150 [g] y temperatura inicial 20 [°C], se colocó una masa de plomo, cuya capacidad térmica específica es 130 [J/(kg·Δ°C)], a 80 [°C] de temperatura junto con 90 [mℓ] de aceite a 40 [°C]. Si la temperatura de equilibrio que alcanza el sistema de las tres sustancias es 45 [°C], determine, en el SI:

a) El modelo matemático que relaciona el calor suministrado (Q) en función de la temperatura (T) de la muestra de cobre.
b) La capacidad térmica específica del cobre.
c) La energía que habría que retirarle a la muestra de cobre con temperatura inicial de 20 [°C] para que su temperatura fuese 0 [°C].
d) La masa de aceite en el calorímetro.
e) La masa de plomo en el calorímetro.

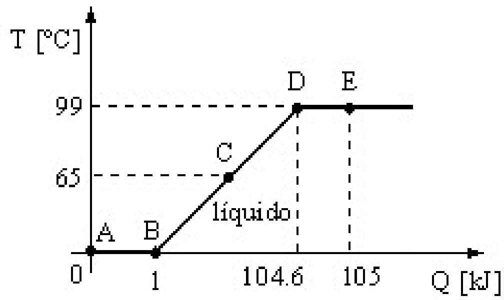


$\rho_{aceite} = 600$ [kg/m^3] ;
$c_{aceite} = 2.09325$ [kJ/(kg·Δ°C)]

8. En un recipiente adiabático de 1500 [cm^3] de capacidad, se tiene agua, cuya capacidad térmica específica es 4186 [J/(kg·Δ°C)] y densidad de 999.97 [kg/m^3] a una temperatura de 20 [°C]. Después se agregó una cierta cantidad de una sustancia desconocida cuya capacidad térmica específica es 2430 [J/(kg·Δ°C)] a 60 [°C], obteniéndose una temperatura de 30 [°C]. Si la masa total de la mezcla es de 900 [g], calcule:

a) La masa de la sustancia desconocida que se agregó.
b) La masa de agua que se tenía en el recipiente.
c) La capacidad térmica de la sustancia desconocida.
d) El volumen que ocupa el agua en el recipiente expresado en litros.
e) La cantidad de energía en forma de calor que habría que proporcionarle a la mezcla para lograr un incremento de temperatura de 5 [K].

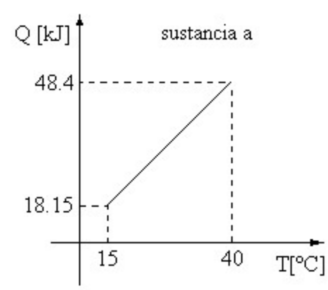
9. En un calorímetro se colocaron 250 [g] de una sustancia. Se le proporcionó energía en forma de calor por medio de un resistor que estaba conectado a una fuente de voltaje de 12 [V]. Se fue midiendo la energía calorífica (Q) proporcionada a la sustancia y la temperatura (T) que tenía y se obtuvo la gráfica que se muestra. Con base en ello, determine:

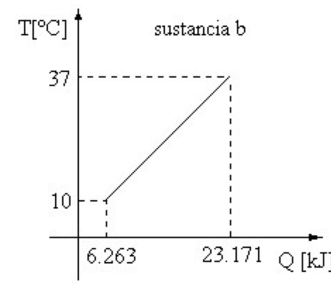


a) La capacidad térmica específica de la sustancia en su fase líquida.
b) La cantidad de energía en forma de calor proporcionada a la sustancia para que ésta pasara del punto D al punto E.
c) La potencia que disipó el resistor para proporcionar la cantidad de calor del inciso anterior si se sabe que para que la sustancia pasara del punto D al punto E la fuente estuvo operando durante 1 minuto.
d) La corriente eléctrica que circuló por el resistor mencionado y su expresión dimensional en el SI.
e) Si cuando la sustancia estaba en el punto C se hubiera desconectado la fuente y se hubiera vertido una cantidad de 100 [g] de la misma sustancia a una temperatura de 20 [°C], ¿cuál hubiera sido la temperatura de equilibrio?

10. Las gráficas siguientes muestran la caracterización térmica de dos sustancias a y b respectivamente.

sustancia	a	b
temperatura inicial [ºC]	10	40
masa	(4/3)m_b	m_b





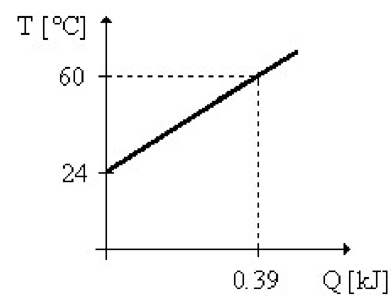
En un recipiente adiabático se mezclan las masas de las dos sustancias, cuyas condiciones iniciales se muestran en la tabla anterior. Una vez mezcladas las dos sustancias y estando en equilibrio térmico se sabe que la masa total de dichas sustancias fue 0.875 [kg]. Determine en el SI:

a) Las masas de las sustancias a y b.
b) La capacidad térmica de las dos sustancias.
c) La capacidad térmica específica de la sustancia a.
d) La temperatura de equilibrio.
e) La expresión dimensional de la capacidad térmica específica de la sustancia b.

11. En un laboratorio de física se le proporcionó energía en forma de calor (Q) a una muestra cuya masa era 78 [g] desde su temperatura inicial hasta alcanzar 60 [°C], como se muestra en la gráfica. Determine:

a) La capacidad térmica específica de la muestra e identifique la sustancia.
b) La temperatura inicial de la muestra y su expresión dimensional, ambas en el SI; diga si esta propiedad es intensiva o extensiva, justificando su respuesta.
c) El modelo matemático de la gráfica.
d) La cantidad total de energía en forma de calor que se le debe suministrar a la masa para lograr en ésta un incremento de 12 [K]. Utilice la capacidad térmica específica experimental de la muestra.
e) Si al llegar a 72 [°C] se colocó la muestra en un calorímetro junto con 56 [g] de agua a 18 [°C] ¿cuál fue la temperatura de equilibrio considerando la capacidad térmica específica del calorímetro despreciable y la capacidad térmica específica experimental de la sustancia?

sustancia	*capacidad térmica específica* [J/(kg·ΔK)]
aluminio	910
cobre	390
hierro	470
mercurio	138
plata	234
agua	4186



12. Un calorímetro cuya capacidad térmica específica es despreciable, contiene 0.09 [litros] de agua cuya capacidad térmica específica es 4 186 [J/(kg·Δ°C)] y su densidad es ρ = 990 [kg/m^3]. La temperatura inicial del agua es 20 [°C], en el interior del calorímetro se coloca un bloque de un material cuya masa es 100 [g] a una temperatura de 85 [°C]. Si el sistema (agua - material) alcanza el equilibrio térmico a los 25 [°C] y se sabe que 1 [cal] = 4.186 [J], determine en unidades del SI:

a) La energía en forma de calor transferida al agua, es decir, la que recibió.
b) La energía cedida por el material.
c) La capacidad térmica específica del material.
d) La cantidad de energía en forma de calor que habría que transferirle al sistema, después de haber alcanzado el equilibrio térmico, para que aumente su temperatura en 2.5 [K].
e) El tiempo que tendría que calentarse el sistema anterior si la energía de inciso anterior la proporciona una fuente de 100 [W].

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) $m = 88.5$ [g]
   b) $T_i = -14$ [°C]
   c) $Q = 2\,800$ [J]

2. a) Q [J] = 85 543.35 [J/kg] m [kg] + 345.72 [J]
   b) $m = (\Delta T)$ c
   c) $T = -37.85$ [°C]

3. a) $c = 2\,440$ [J/(kg·Δ°C)]
   b) $T = 0.082$ [°C]
   c) $T_f = 45.35$ [°C]

4. a) 177 balines
   b) $Q = 51.069$ [kJ]
   c) $t = 17.02$ [min]

5. a) $c = 52.631$ [J/(g·Δ°C)]
   b) $Q = 375\,000$ [J]
   c) $Q = 20\,000$ [J]

6. a) $m = 0.0623$ [kg]
   b) $T = 336.83$ [K]
   c) $m_{adic} = 0.909$ [kg]
   d) $t = 3.268$ [min]

7. a) Q [J] = 156 [J/°C] T [°C] – 3 120 [J]
   b) $c = 390$ [J/(kg·Δ°C)]
   c) $Q = -3\,120$ [J]
   d) $m_a = 0.054$ [kg]
   e) $m_p = 0.4456$ [kg]

8. a) $m_s = 0.3283$ [kg]
   b) $m_a = 0.5717$ [kg]
   c) $C_s = 797.77$ [J/°C]
   d) $V_a = 0.5717$ [ℓ]
   e) $Q = 15.955$ [kJ]

9. a) $c_s = 4\,185.86$ [J/(kg·Δ°C)]
   b) $Q = 400$ [J]
   c) $P = 6.6667$ [W]
   d) $I = 0.5556$ [A]; [I] = I
   e) $T_{eq} = 52.1429$ [°C]

10. a) $m_a = 0.5$ [kg]; $m_b = 0.375$ [kg]
    b) $C_a = 1\ 210$ [J/K]; $C_b = 626.22$ [J/K]
    c) $c_a = 2\ 420$ [J/(kg·ΔK)]
    d) $T_{eq} = 293.23$ [K]
    e) $[c_b] = L^2\ T^{-2}\ \Theta^{-1}$

11. a) $c_s = 138.8889$ [J/(kg·Δ°C)]; mercurio
    b) $T_i = 297$ [K]; dim $(T_i) = \Theta$; propiedad intensiva
    c) T [°C] = 0.0923 [°C/J] Q [J] + 24 [°C]
    d) Q = 130 [J]
    e) T = 20.3853 [°C]

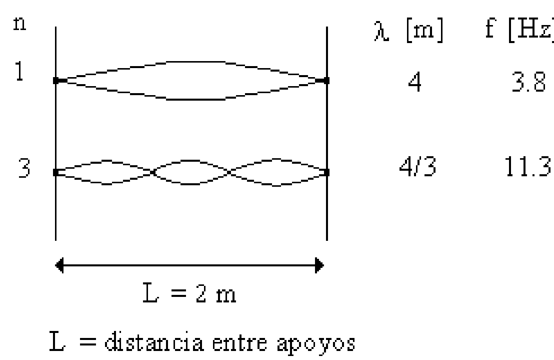
12. a) $Q_a = 1864.863$ [J]
    b) $Q_m = -\ 1864.863$ [J]
    c) $c_m = 310.8105$ [J/(kg·ΔK)]
    d) $Q_s = 1010.1341$ [J]
    e) $\Delta t = 10.1013$ [s]

Movimiento ondulatorio

Ejercicios resueltos

1. Un alumno generó varios patrones de ondas estacionarias en el laboratorio de Física Experimental. La distancia entre apoyos que utilizó era 2 [m]. Varió la longitud de onda (λ) y midió la frecuencia (f) correspondiente, parte de las mediciones se muestran en la figura. Sabiendo que la longitud de onda fue la variable independiente, determine en el SI:

a) La rapidez de propagación de la onda.
b) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento.
c) La densidad lineal de la cuerda si la tensión que se le aplicó fue 2.4 [N].
d) El porcentaje de error de exactitud si la rapidez teórica de la onda era 18 [m/s].



Resolución:

a) Las variables del experimento longitud de onda (λ) y frecuencia (f) no guardan una relación lineal, por lo tanto será necesario hacer un cambio de variable. Se propone un modelo matemático lineal que relacione al periodo (τ) en función de la longitud de onda (λ), entonces las variables involucradas serían las de la tabla que se muestra a continuación, recordando que el periodo es el recíproco de la frecuencia:

λ [m]	τ [s]
4	0.2632
4/3	0.0885

Sabemos que la rapidez de propagación de una onda se puede calcular como $v = f\,\lambda$, lo que se puede escribir como $v = \frac{\lambda}{\tau}$, de esta última expresión podemos despejar el periodo, es decir

$\tau = \frac{\lambda}{v}$, o bien $\tau = \left(\frac{1}{v}\right)\lambda$, si comparamos esto último con el modelo matemático propuesto al principio de este inciso, es decir con $\tau = m\,\lambda + b$, podemos concluir que la pendiente es

$m = \left(\frac{1}{v}\right)$, por lo tanto para obtener la rapidez de propagación de la onda obtendremos la pendiente:

$m = \frac{\Delta\tau}{\Delta\lambda} = \frac{(0.0885 - 0.2632)\ [\text{s}]}{(4/3\ - 4)\ [\text{m}]} = \frac{-0.1747\ [\text{s}]}{-2.6667\ [\text{m}]} = 0.0655\ \left[\frac{\text{s}}{\text{m}}\right]$, con esta pendiente podemos determinar la rapidez, esto es:

$\text{v} = \frac{1}{0.0655\left[\frac{\text{s}}{\text{m}}\right]}$, $\text{v} = 15.2643\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.

b) Determinaremos la ordenada al origen con la pendiente obtenida en el inciso anterior y uno de los puntos experimentales que se tienen, es decir:

$b = \tau_1 - m\,\lambda_1 = (0.2632\ [\text{s}]) - (0.0655\ [\text{s/m}])(4\ [\text{m}]) = 0.0012\ [\text{s}]$, entonces el modelo es

$$\tau\ [\text{s}] = 0.0655\left[\frac{\text{s}}{\text{m}}\right]\lambda\ [\text{m}] + 0.0012\ [\text{s}].$$

c) Sabemos que la rapidez de propagación, en una onda mecánica transversal, está dada por

$$\text{v} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\ ;\ \text{de donde}\ \mu = \frac{T}{\text{v}^2},\ \text{entonces}\ \mu = \frac{2.4\ \text{N}}{\left(15.2643\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]\right)^2} = 0.0103\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right].$$

d) El porcentaje de error de exactitud esta dado por

$$\%EE = \left|\frac{\text{v}_{\text{teórica}} - \text{v}_{\text{experimental}}}{\text{v}_{\text{teórica}}}\right| \times 100\%\ ,\ \text{entonces}\ \%EE = \left|\frac{(18 - 15.2643)}{18}\right| \times 100\% = 15.1983\ \%.$$

2. En un experimento de ondas estacionarias y modos de vibración en una cuerda tensa, en el Laboratorio de Física Experimental, se obtuvieron las lecturas de longitud de onda (λ) y frecuencia (f) que se muestran; la aceleración gravitatoria del lugar era 9.78 [m/s^2]. Con base en ello, determine:

n [1]	λ [m]	f [mHz]
3	2.0	29 900
5	1.2	51 500

a) La rapidez de propagación de la onda, a partir del modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento.
b) La masa que se utilizó para tensar la cuerda si la densidad lineal de esta última era 0.0003 [kg/m].
c) La longitud de la cuerda si su masa era de 0.84 [g], exprese el resultado en el sistema c.g.s. gravitatorio, es decir en [cm].

Resolución:

a) Las variables longitud de onda "λ" y frecuencia "f" no guardan una relación lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, se propone utilizar el periodo, que es el recíproco de la frecuencia; entonces los valores a considerar para el modelo matemático serán

$\lambda[\text{m}]$	2.0	1.2
$\tau[\text{s}]$	0.0334	0.0194

El modelo matemático tendrá la forma $\tau = m\,\lambda + b$, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta\tau}{\Delta\lambda}$,

por lo tanto $m = \dfrac{(0.0194 - 0.0334)\,[\text{s}]}{(1.2 - 2)\,[\text{m}]} = 0.0175\left[\dfrac{\text{s}}{\text{m}}\right]$,

el significado físico de la pendiente de este modelo matemático es $m = \dfrac{1}{v}$, entonces

$$v = \frac{1}{0.0175\left[\dfrac{\text{s}}{\text{m}}\right]} = 57.1429\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right].$$

b) Sabemos que la rapidez de propagación en una onda mecánica y transversal está dada por

$v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, de donde la tensión aplicada a la cuerda se puede calcular como $T = \mu\, v^2$,

por otra parte la tensión es $T = m_P \cdot g$, igualando estas últimas dos expresiones tenemos

$m_P \cdot g = \mu\, v^2$, de donde podemos despejar la masa que se utilizó para tensar a la cuerda, es decir

$$m_p = \frac{\mu\, v^2}{g}, \text{ entonces } m_p = \frac{\left(0.0003\left[\dfrac{\text{kg}}{\text{m}}\right]\right)\cdot\left(57.1429\left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right]\right)^2}{9.78\left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]} = 0.1002\ [\text{kg}].$$

c) La densidad lineal de la cuerda está dada por $\mu = \dfrac{m_c}{\ell_c}$ de donde podemos despejar la longitud de dicha cuerda, es decir

$$\ell_c = \frac{m_c}{\mu} = \frac{(0.00084\ [\text{kg}])}{0.0003\left[\dfrac{\text{kg}}{\text{m}}\right]} = 2.8\ [\text{m}] = 280\ [\text{cm}].$$

3. En un experimento de ondas se tensó una cuerda y se generaron varios patrones de ondas estacionarias con ella; se midieron la longitud de onda y la frecuencia que se muestran en la tabla. Con base en ello, determine en el SI:

frecuencia [Hz]	14	28	42	56
longitud de onda [cm]	33.6	16.81	11.21	8.4

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento. Considere que la ordenada al origen es despreciable y que la variable independiente fue la frecuencia.

b) La rapidez de propagación de la onda y su expresión dimensional.

c) La longitud de la cuerda utilizada si su masa es 80 [g] y la tensión que se le aplicó fue 3 [N].

Resolución:

a) La relación entre las variables de la tabla no es lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, sacaremos el recíproco de la frecuencia, es decir el periodo, por lo tanto los valores a considerar para determinar el modelo matemático serán:

τ [s]	λ [m]
0.0714	0.336
0.0357	0.1681
0.0238	0.1121
0.0179	0.084

El modelo matemático tendrá la forma $\lambda = m\,\tau + b$, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta\lambda}{\Delta\tau}$, por lo tanto

$m = 4.7077 \left[\dfrac{m}{s}\right]$,

entonces el modelo matemático lineal es $\lambda\,[m] = 4.7077 \left[\dfrac{m}{s}\right] \tau\,[s]$.

b) La pendiente de este modelo es $m = v$, por lo tanto la rapidez de propagación de la onda es

$v = 4.7077 \left[\dfrac{m}{s}\right]$ y su expresión dimensional es $\dim(v) = L\,T^{-1}$.

c) La rapidez de propagación está dada por $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$; de donde

$$v^2 = \frac{T}{\mu} = \frac{T}{\left(\dfrac{m_c}{\ell_c}\right)} = \frac{T\,\ell_c}{m_c},$$

de esta última expresión podemos despejar la longitud de la cuerda, es decir

$$\ell_c = \frac{v^2\,m_c}{T} = \frac{\left(4.7077\left[\dfrac{m}{s}\right]\right)^2 \cdot (0.08\,[kg])}{3\,[N]} = 0.591\,[m].$$

4. En un experimento de ondas en una cuerda tensa, se varió la frecuencia (f) y se midió la longitud de onda (λ) correspondiente. Se obtuvo el modelo matemático siguiente:

$$\tau\,[s] = 0.004\,[s] + 0.0253\,[s/m]\,\lambda\,[m]$$

Determine:

a) La tensión aplicada a la cuerda si su densidad lineal era 1.658 [g/m]. Exprese el resultado en el sistema c.g.s. absoluto, es decir en [dinas]. Considere que 10^5 [dinas] = 1 [N].

b) La frecuencia (valor experimental) de la onda que se tendría si su distancia de cresta a cresta fuese 1 [ft] = 0.3048 [m].

Resolución:

a) El modelo matemático proporcionado tiene la forma $\tau = b + m\,\lambda$, cuya pendiente es $m = v^{-1}$, por lo tanto $v = \left(0.0253\left[\frac{s}{m}\right]\right)^{-1} = 39.5257\left[\frac{m}{s}\right]$,

también sabemos que $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$; de donde $v^2 = \frac{T}{\mu}$, despejando de esta última expresión la tensión aplicada a la cuerda podemos escribir $T = v^2\,\mu$, por lo tanto

$$T = \left(39.5257\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2 \cdot \left(0.001658\left[\frac{kg}{m}\right]\right) = 5.5903\,[N]\cdot\left(\frac{10^5\,[dinas]}{1\,[N]}\right),$$

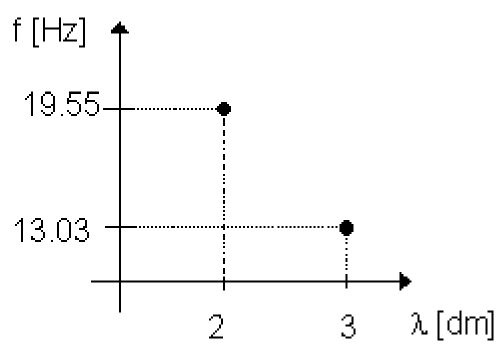
T = 259 026.07 [dinas].

b) La distancia de cresta a cresta es la longitud de onda, por lo tanto λ = 0.3048 [m], a partir del modelo matemático podemos determinar el periodo correspondiente a esa longitud de onda, esto es

$\tau[s] = 0.004[s] + 0.0253[s/m]\cdot(0.3048[m]) = 0.0117\,[s]$, entonces

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.0117\,[s]} = 85.3866\,[Hz].$$

5. En un experimento de movimiento ondulatorio se generaron varias ondas en una cuerda tensa; se midió la frecuencia (f) de dichas ondas para algunas longitudes de onda (λ) y se obtuvo la gráfica que se muestra. Sabiendo que la aceleración gravitatoria del lugar era 9.78 [m/s^2] y que 2.5 [m] de la cuerda utilizada tenían una masa de 400 [g], determine, en gramos, el valor de la masa utilizada para tensar la cuerda y observar el movimiento ondulatorio.



Resolución:

La relación entre las variables de la gráfica no es lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, entonces tenemos que las variables serán las que se muestran en la tabla siguiente:

λ[m]	τ[s]
0.2	0.051151
0.3	0.076746

El modelo matemático lineal que relaciona a la longitud de onda en función del periodo tiene la forma $\lambda = m\,\tau + b$, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta\,\tau}{\Delta\,\lambda}$, esto es

$m = \dfrac{(0.0767-0.0512)\,[\mathrm{s}]}{(0.3-0.2)\,[\mathrm{m}]} = \dfrac{0.0255\,[\mathrm{s}]}{0.1\,[\mathrm{m}]} = 0.255\left[\dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right]$, el significado físico de la pendiente de dicho modelo es $m = v^{-1}$, por lo tanto $v = m^{-1}$, entonces $v = \left(0.255\left[\dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right]\right)^{-1} = 3.9216\left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$;

sabemos, también que la rapidez de propagación está dada por $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, de donde

$v^2 = \dfrac{T}{\mu}$, despejando la tensión tenemos que $T = v^2\,\mu$ y como la tensión es también el producto

$T = m_P\, g$, podemos escribir $m_P\, g = v^2\,\mu$, de esta última expresión podemos despejar la masa utilizada para tensar la cuerda, es decir

$$m_P = \frac{v^2\mu}{g} = \frac{v^2\left(\dfrac{m_c}{\ell_c}\right)}{g} = \frac{v^2 m_c}{g\,\ell_c}\text{, por lo tanto}$$

$$m_P = \frac{\left(3.9216\left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]\right)^2\cdot(0.4\,[\mathrm{kg}])}{(2.5\,[\mathrm{m}])\cdot\left(9.78\left[\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]\right)} = 0.2516\,[\mathrm{kg}]\left(\frac{1000\,[\mathrm{g}]}{1\,[\mathrm{kg}]}\right) = 251.5983\,[\mathrm{g}].$$

6. Se generaron varios patrones de ondas en una cuerda tensa; se midieron las longitudes de onda (λ), las frecuencias (f) correspondientes y se obtuvo la tabla que se muestra. Sabiendo que los patrones de onda que se generaron son de tipo senoidal de la forma
$y(x,t) = A\,sen\,(\omega t - k x)$, determine en el SI:

λ [m]	0.4	0.5	0.6
f [Hz]	56	44	37

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento; considere que la variable independiente fue la longitud de onda y que la ordenada al origen es despreciable.
b) La rapidez de las ondas, basándose en el modelo del inciso anterior.
c) La ecuación de onda para una perturbación cuya amplitud es 0.05 [m], frecuencia $65/(2\pi)$ [Hz] y longitud de onda $(2\pi)/28$ [m].

Resolución:

a) Como la relación entre las variables frecuencia y longitud de onda no es lineal, será necesario hacer un cambio de variable; lo adecuado entonces será trabajar con las variables longitud de onda y periodo. El modelo matemático lineal tendrá la forma $\tau = m\,\lambda$, cuya pendiente es
$m = \Delta\tau / \lambda\Delta$; para determinar el modelo matemático utilizando el método de la suma de los cuadrados mínimos se puede elaborar la tabla siguiente:

λ[m]	τ[s]	$\lambda \cdot \tau$ [m·s]	λ^2[m^2]
0.4	0.0179	0.00716	0.16
0.5	0.0227	0.01135	0.25
0.6	0.0270	0.01620	0.36
$\Sigma\lambda$=1.5	$\Sigma\tau$=0.0676	$\Sigma\lambda\cdot\tau$=0.03471	$\Sigma\lambda^2$=0.77

A partir de las expresiones del método de mínimos cuadrados mostradas en el Apéndice de este Cuaderno de Ejercicios tenemos

$$m = \frac{(3)(0.0371[\mathrm{m\cdot s}]) - (1.5[\mathrm{m}])(0.0676[\mathrm{s}])}{(3)(0.77[\mathrm{m}^2]) - (1.5[\mathrm{m}])^2} = \frac{0.00273[\mathrm{m\cdot s}]}{0.06[\mathrm{m}^2]} = 0.0455\ [\mathrm{s/m}].$$

entonces el modelo matemático es τ [s] = 0.0455 [s/m] λ [m].

b) Dado que la pendiente del modelo matemático del inciso anterior es $m = 1 / v$, entonces
$v = m^{-1} = (0.0455\ [\mathrm{s/m}])^{-1} = 21.978\ [\mathrm{m/s}]$.

c) La ecuación de onda tiene la forma $y\,(x\,,\,t\,) = A\ sen\,(\,\omega t - k x\,)$,
sabemos que la frecuencia angular está dado por $\omega = 2\,\pi\,f$,
por lo tanto $\omega = 2\,\pi\,(65/2\pi)$ [rad/s] = 65[rad/s], por otra parte
el número de onda se puede calcular como $k = 2\pi / \lambda$,
entonces $k = 2\pi / (\,2\pi / 28\,)$ [rad/m] = 28[rad/m], con base en esto la ecuación de onda es
$y\,(x\,,\,t) = 0.05$ sen (65 [rad/s] t [s] − 28 [rad/m] x [m]) [m].

Movimiento ondulatorio

Ejercicios propuestos

1. En cierto laboratorio de física se realizaron mediciones de longitud de onda (λ) y frecuencia (f), los resultados experimentales se muestran en la tabla. Con base en ello determine:

   a) El mejor estimador de la rapidez de la onda.
   b) El modelo matemático lineal de dicho experimento. Considere la longitud de onda como variable dependiente.
   c) Si la rapidez obtenida es la de una onda sonora, ¿en qué medio se propaga? (aproximadamente).
   d) El valor de la longitud de onda para una frecuencia de 60 Hz.

f [Hz]	λ [m]
340	1.0
170	2.0
113	3.0
85	4.0
68	5.0
56	6.0
48	7.0
42	8.0
37	9.0
34	10.0

Medio	v [m/s]
agua	1493
aire	343
hierro	5130
goma	54

2. La cuerda más corta de un piano mide 5.1 [cm] y genera una frecuencia de 4 186 [Hz] al pulsarse. La cuerda más larga del piano mide 1.98 [m] y genera 32.8 [Hz]. Calcule la relación de la densidad lineal de la cuerda larga entre la densidad lineal de la cuerda corta. La tensión en cada cuerda es la misma.

3. A una cuerda elástica e inextensible se le ata en uno de sus extremos y en el otro se le aplica una tensión. Dicha cuerda tiene una masa de 1.25 [kg] y una longitud de 5 [m] y al excitar uno de sus extremos con perturbaciones sinusoidales de la forma y (x,t) = 0.03 sen (ω t $-$ k x) [m] se obtuvieron los datos de frecuencia y longitud de onda mostradas en la tabla. Determine, en el SI:

a) La rapidez de propagación de la onda en la cuerda.
b) La tensión que se aplicó a la cuerda.
c) Si $y = 0.03 \text{ sen } (120\pi\ t - 8\pi\ \ x)$ [m], determine la amplitud, la frecuencia angular y la longitud de onda de la perturbación.

f [Hz]	λ [m]
5	3.0
10	1.5
15	1.0
20	0.75
25	0.60
30	0.50

4. En un enlace vía satélite, entre la cd. A y la cd. B, ambas al nivel del mar, se obtuvieron las mediciones de la tabla. Sabiendo que las ciudades distan 1,000 [km] entre sí y que el satélite está situado a 35 788 [km] sobre el nivel del mar; determine:

a) El modelo matemático lineal que relacione la longitud de onda de la señal con su frecuencia. Elija a λ como la ordenada.
b) El significado físico de la pendiente.
c) La rapidez (experimental) de propagación de la señal.
d) El tiempo que tarda la señal en llegar de la cd. A a la B, si el satélite se encuentra en medio de las dos ciudades y la señal se propaga con rapidez constante en la atmósfera. Desprecie el efecto de curvatura de la Tierra y considere que la rapidez de la señal es constante.

λ [m]	f [GHz]
0.30	1
0.25	1.1
0.21	1.3
0.18	1.4

5. En una línea de transmisión viaja un mensaje analógico. Se tiene la información que se muestra en la tabla. Con base en ello, determine:

a) La rapidez de propagación con la que viaja dicho mensaje.
b) ¿Cuántos ciclos en cada segundo se tendrían si la longitud de onda fuese λ = 150 [Å]?
c) ¿Cuál sería la distancia de cresta a cresta si el periodo fuese de 0.01 [μs]?

λ [Å]	T [μs]	f [MHz]
200	0.0500	20
100	0.0250	40
66	0.0166	60
50	0.0125	80
40	0.0100	100
33	0.0083	120

$1\ [\text{Å}] = 1 \times 10^{-10}$ [m]

6. Si una cuerda del violín, que mide 33 cm, se pulsa, genera la nota *"la"* cuya frecuencia es de 440 Hz.

a) ¿A qué distancia del puente debe pisarse la cuerda para generar la nota *"mi",* cuya frecuencia es de 659 Hz ?
b) Si la tensión de ésta fuese 55 N, ¿cuál sería su masa, en [mg]?

7. En el laboratorio de Física Experimental se realizó un experimento de ondas generando un patrón de ondas estacionarias y se obtuvo la tabla que se muestra. Si la distancia entre los puntos de apoyo de la cuerda fue 2 [m], se utilizó una masa de 200 [g] para tensar dicha cuerda y g = 9.78 [m/s^2] determine:

a) El modelo matemático lineal que representa el fenómeno estudiado. Considere a la longitud de onda (λ) en el eje de las abscisas y que la ordenada al origen es despreciable.
b) La rapidez de propagación de la onda a partir del modelo matemático anterior.
c) La densidad lineal de la cuerda y su expresión dimensional en el SI.
d) Si la tensión aumenta al cuádruple de la indicada ¿cómo se modificaría la rapidez de propagación de la onda?

n (modo de vibración)	f [Hz]
1	4.8
2	11.2
3	15.0
4	20.6
5	26.7
6	29.8

8. Una cuerda inextensible se ata en uno de sus extremos. Se genera una onda transversal con una frecuencia de 10 ciclos en cada segundo. Si la longitud de onda medida fue 1.25 [m] determine:

a) La tensión que se le aplicó a la cuerda, si ésta tiene una longitud de 2 [m] y su masa es de 25 [mg], expresándola en dinas, si se sabe que 1 [N] = 10^5 [dinas].
b) La frecuencia angular de la señal y su expresión dimensional en el SI.

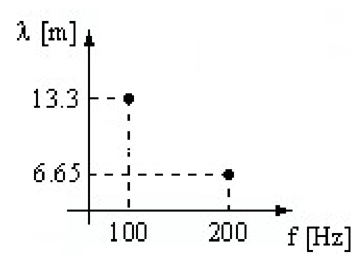
9. Estudiando en la Ciudad de México la propagación de ondas transversales en una cuerda tensa, cuya densidad es 318 [kg/m^3] y el diámetro de su sección transversal es 4 [mm], se generaron varios patrones de onda estacionaria y se midieron los valores de frecuencia (f) para varios modos de vibración (n) y los datos registrados se presentan en la tabla. Considerando que para el primer modo de vibración la distancia entre nodos fue de 3 [m], determine:

a) El modelo matemático lineal que relaciona las variables período y longitud de onda. Considere la longitud de onda (λ) en el eje de las abscisas.
b) La rapidez de propagación de las ondas.
c) La densidad lineal de la cuerda utilizada considerando que en el modo de vibración unitario se utilizó toda la cuerda entre los puntos de apoyo.
d) El valor de la masa que se utilizó para tensar la cuerda.

n	f [mHz]
1	10 100
2	19 800
3	29 900
4	41 000
5	51 500
6	59 000

10. En un laboratorio se transmitió una onda sonora a través de un gas. Con las mediciones realizadas se obtuvo la gráfica que se muestra. Con base en ello determine:

Gas (a 20 °C)	rapidez del sonido [m/s]
aire	344
helio	999
hidrógeno	1330



a) El modelo matemático lineal que relaciona las variables del experimento. Considere que la ordenada al origen es despreciable.
b) El significado físico de la pendiente del modelo anterior y su expresión dimensional en el SI.
c) De acuerdo con la tabla que se muestra, identifique el gas utilizado en el experimento.
d) A partir del modelo obtenido, la longitud de onda que se tendría para una frecuencia de 300 [Hz].
e) Suponiendo que el gas utilizado hubiese sido aire, ¿qué longitud de onda se tendría para un periodo τ = 10 [ms]?

11. En una cuerda, fija en uno de sus extremos, se generaron varios patrones de onda estacionarios. Se dejó fija la frecuencia y cambiando las masas se varió la rapidez de propagación de la onda obteniéndose la tabla que se muestra. Con base en ello, encuentre, en el SI:

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento. Considere que la variable dependiente fue la longitud de onda.
b) El periodo de la señal propagada.

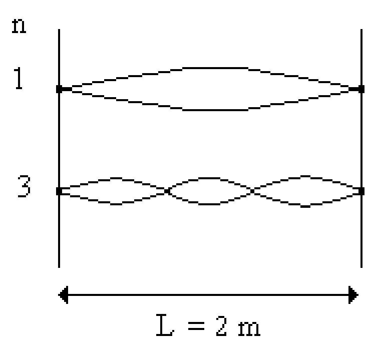
c) Si la rapidez de propagación de la onda fuese v = 25 [m/s], ¿cuál sería la longitud de onda, la frecuencia, la frecuencia angular y el número de onda correspondientes?

v [m/s]	λ [dm]
15	5.4
17	6
19	6.8
21	7.5

12. La cuerda de un instrumento musical se cambió por otra del mismo material, pero con un diámetro dos veces mayor que el original. ¿Cómo debe ser la tensión de la cuerda para que su frecuencia de vibración sea la misma que para la cuerda original?

13. Un alumno generó varios patrones de ondas estacionarias en el laboratorio de Física Experimental. La distancia entre apoyos que utilizó era 2 [m]. Varió la longitud de onda (λ) y midió la frecuencia (f) correspondiente, parte de las mediciones se muestran en la figura. Sabiendo que la longitud de onda fue la variable independiente, determine en el SI:

a) La rapidez de propagación de la onda.
b) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento.
c) La densidad lineal de la cuerda si la tensión que se le aplicó fue 2.4 [N].
d) El porcentaje de error de exactitud si la rapidez teórica de la onda era 18 [m/s].



λ [m]	f [Hz]
4	3.8
4/3	11.3

L = distancia entre apoyos

14. En un experimento de ondas se varió la frecuencia, se midió la longitud de onda (λ) y se determinó el periodo (τ) correspondientes, obteniéndose la tabla que se muestra. Con base en ello, determine:

a) El modelo matemático lineal que relaciona las variables del experimento, considere a la variable λ en el eje de las abscisas.

b) A partir del modelo del inciso anterior, la rapidez de propagación de la onda, la frecuencia angular y el número de onda para una longitud de onda de 0.35 [m].

λ [m]	f [Hz]	τ [s]
0.2	14.28	0.07
0.3	10	0.1
0.4	7.69	0.13

15. En un experimento de movimiento ondulatorio se generaron varios patrones de ondas estacionarias con una cuerda que se tensó utilizando una masa M. Se varió la frecuencia y se midió la longitud de onda correspondiente obteniéndose la tabla que se muestra. Sabiendo que la aceleración gravitatoria del lugar era 9.78 [m/s^2], determine:

a) La rapidez de propagación de la onda.
b) La longitud de la cuerda utilizada si la masa M era 1.2 veces la masa de la cuerda.

f [Hz]	7.5	8.1	9.2	10.5
λ [cm]	50	45	40	35

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) $v = 335.6774$ [m/s]
   b) λ [m] = 335.6774 [m/s] τ [s] + 0.0257 [m]
   c) aire
   d) $\lambda = 5.6203$ [m]

2. $\mu_2 / \mu_1 = 10.8059$ [1]

3. a) $v = 15$ [m/s]
   b) $T = 56.25$ [N]
   c) $A = 0.03$ [m], $\omega = 120\pi$ [rad/s], $\lambda = 0.25$ [m]

4. a) λ [m] = (3.9511×10^8 [m/s]) τ [s] – 0.1 [m]
   b) m = v (rapidez de propagación)
   c) $v = 3.9511 \times 10^8$ [m/s]
   d) $t = 181.17$ [ms]

5. a) $v = 0.4003$ [m/s]
   b) $f = 26.6867$ [MHz]
   c) $\lambda = 4$ [nm]

6. a) $d = 0.2203$ [m]
   b) $m = 215.22$ [mg]

7. a) τ [s] = 0.0534 [s/m] λ [m]
   b) $v = 18.7266$ [m/s]
   c) $\mu = 5.5776$ [g/m] ; $\dim(\mu) = M\,L^{-1}$
   d) aumenta al doble.

8. a) $T = 195.31$ [dinas]
   b) $\omega = 20\pi$ [rad/s] ; $\dim(\omega) = T^{-1}$

9. a) τ [s] = 0.0165 [s/m] λ [m]
   b) $v = 60.477$ [m/s]
   c) $\mu = 1.332$ [g/m]
   d) $m = 498.1$ [g]

10. a) λ [m] = 1330 [m/s] τ [s]
    b) m = v ; [m] = $L\,T^{-1}$
    c) hidrógeno.
    d) $\lambda = 4.4333$ [m]
    e) $\lambda = 3.44$ [m]

11. a) λ [m] = 0.0355 [s] v [m/s] + 0.0035 [m]
    b) τ = 35.5 [ms]
    b) λ = 0.891 [m], f = 28.169 [Hz], ω = 176.9911 [rad/s], k = 7.0518 [rad/m]

12. a) $T_{nueva} = 4\ T_{original}$

13. a) v = 15.2643 [m/s]
    b) τ [s] = 0.0655 [s/m] λ [m] + 0.0012 [s]
    c) μ = 0.0103 [kg/m]
    d) %EE = 15.1983%

14. a) τ [s] = 0.3 [s/m] λ [m] + 0.01 [s]
    b) v = 3.3333 [m/s], ω = 54.6364 [rad/s], k = 17.952 [rad/m]

15. a) v = 3.848 [m/s]
    b) ℓ_{cuerda} = 1.2617 [m]

Apéndice

Algunos factores de conversión útiles para este curso:

1 [bar] = 10^5 [Pa]
1 [cal] = 4.186 [J]
1 [ft] = 0.3048 [m]
1 [ℓb] = 0.4536 [kg]
1 [BTU] = 1 055 [J]
1 [N] = 0.2248 [ℓb_f]
1 [in] = 2.54 [cm]
1 [N] = 10^5 [dinas]
1 [rpm] = 1 [revolución/minuto]
1 [slug] = 0.4536 [kg]
1 [kg_f] = 9.81 [N]

$$T\,[K] = \left(T\,[°C] + 273.15\,[°C]\right)\left[\frac{1\Delta K}{1\Delta °C}\right]$$

Expresiones del método de la suma de los cuadrados mínimos o método de los mínimos cuadrados:

$$m = \frac{n\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\Sigma y_i)(\Sigma x_i^2) - (\Sigma x_i y_i)(\Sigma x_i)}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$